平成16年度

卒業論文

Sturm-Liouville型境界値問題に対する有限要素法と有限差分法の精度比較

平成17年2月2日

指導教授：　山本　哲朗　教授

早稲田大学　理工学部　情報学科

1g00p018-3　内田　博之

目 次

第 1 章

序論

1.1　背景

数値解析法に求められるものは、いかに計算時間を減らし、すなわち、計算量を少なくし効率よく問題を解くかということと、いかに誤差を小さくし精度よく問題を解くかということである。ある手法によって問題の近似解を計算するときに、いくら計算量が少なくても、計算して得られた近似解の精度がよくなければ意味はない。逆に、いくら計算して得られた近似解の精度がよくても、その解を得るまでに費やしたコスト、あるいは時間が膨大なものになるならばその手法に実用性はない。

微分方程式を利用して各種の現象を数学的に記述し、元の現象を模擬、説明し、さらに予知することは科学や工学など様々な分野でなされている。しかし、微分方程式の解を解析的に求めることは、特殊な例外を除いて一般的に困難である。そこで、計算機等で近似的、あるいは数値的に解く手法が発展してきた。その有力な手法として、有限要素法(Finite Element Method：FEM)と有限差分法(Finite Difference Method：FDM)（以下差分法）とがある。

有限要素法は構造力学の分野で開発された手法であるが、その後数学的研究が進み数学的に一般化され、構造力学のみならず様々な分野で応用できる手法となっている。一方差分法は、メッシュの取り方を直交的に取らねばならず、境界の形状によっては使いずらい手法であったが、境界付近で半端な格子点が生じ、離散化誤差が１次のオーダーになっても、差分解の誤差は全域で２次のオーダーかつ境界付近では３次のオーダーで収束すること（いわゆる超収束現象）が近年明らかになり、差分法も様々な問題に対して適用できることがわかってきた。

両者を比較すると、有限要素法の方が、メッシュの取り方には柔軟性があり様々な問題に対して適用できるものの、多くの数値積分と多次元の行列演算を必要とするため、差分法より一般的に計算時間、計算量が多くなるというのが常識である。一方精度としては、区分的１次多項式を用いる有限要素法については L_2 ノルムによる評価で、Nitche により

$$||u - u^*||_2 \leq O(h^2) \quad (h = \max_i h_i)$$

であることが示されている。差分法については、絶対誤差の最大値を評価する方法で 1986

年 Mantauffel-White によって 2 点境界値問題に対し任意分点を用いる差分法は

$$\max_i |u_i - U_i| \leq O(h^2) \quad (h = \max_i h_i)$$

であることが示されている。

ノルムによる評価では、言わば誤差の全体、トータルが 2 次収束しているとしか言えていない。場合によっては局所的には非常に精度の悪い近似となっている可能性がある。一方、絶対誤差の最大値による評価では、精度が一番悪い箇所でも 2 次のオーダーであるわけだから、その他の箇所は 2 次以上のオーダーである。よってどちらかと言えば、絶対誤差の最大値によって評価し、それが 2 次収束していると言う方が精度に対する評価としては有効であると一般的には思われている。しかし、かといってノルムによる評価、つまり誤差の全体、積み重なりについても無視はできない。

1.2　本論文の目的

本論文の目的は、対象とする問題を Dirichlet 条件における Sturm-Liouville 型境界値問題に限って、そのいくつかの数値例に対して区分的 1 次多項式を用いる有限要素法を適用し得られた有限要素解の誤差が、絶対誤差の最大値で評価した際にどのように収束しているかを実験的に調べてみることである。また、その上で同様の問題に対して差分法を適用し、有限要素法を適用した場合とそれぞれの近似解の精度を絶対誤差の最大値と 1 ノルムという 2 つ観点から評価し、比較してみる。

1.3　本論文の構成

本論文の構成は以下の通りである。

第 2 章では本論文で対象としている Sturm-Liouville 型境界値問題につき述べる。

第 3 章では 1 次元の有限要素法の基礎事項につき述べる。

第 4 章では 1 次元の任意分点を用いる差分法の基礎事項につき述べる。

第 5 章では実際に数値例として、いくつかの Sturm-Liouville 型境界値問題の例題を取り上げ、有限要素法と差分法を適用した数値結果を示す。

最後に第 6 章で結論と今後の課題を示す。

第 2 章

Sturm-Liouville型境界値問題

2.1　はじめに

この章では常微分方程式の境界値問題と Sturm-Liouvlille 型境界値問題について述べる。一般に微分方程式を解くということは、積分することである。よって微分の階数と同じ数の任意定数を決定する必要がある。

2.2　常微分方程式の境界値問題

微分方程式

$$y^{''} = f(x, y, y') \quad (a < x < b) \tag{2.1}$$

の解で、区間の端点においてあらかじめ指定された条件

$$y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta \tag{2.2}$$

を満足するものを求めよという問題を、閉区間 $[a, b]$ の端点における条件に基づいて解が確定するので、**境界値問題 (Boundary Value Probrem : BVP)** という。特に 1 次元の場合、境界は区間の端点の 2 点なので **2 点境界値問題**ともいう。

2.2.1　境界条件

(2.2) を境界条件と呼ぶが、より一般的な境界条件の与えられ方は

$$B_a[y] \equiv a_1 y(a) + a_2 y^{'}(a) = \alpha, \quad B_b[y] \equiv b_1 y(b) + b_2 y^{'}(b) = \beta \tag{2.3}$$

となる。ただし、a_1、a_2、b_1、b_2 は定数で $a_1 = a_2 = 0$ あるいは $b_1 = b_2 = 0$ となることはないとする。境界値問題では主に 2 階の微分方程式を扱うが、一般に、微分方程式の解は無数に存在するか、あるいは存在しないかのどちらかである。2 階の微分方程式を解くための任意定数 2 つを決定するための条件として境界条件があるとも考えられる。

(2.3) において、$a_2 = b_2 = 0$ の場合、すなわち (2,2) と同じ形の境界条件を **Dirichlet 条件**、あるいは第 1 種境界条件と呼ぶ。

また、$a_1 = b_1 = 0$ の場合、すなわち

$$y^{'}(a) = \alpha_1, \quad y^{'}(b) = \beta_1$$

という、境界でその微係数が指定された条件を Neumann 条件、あるいは第 2 種境界条件と呼ぶ。

また、Neumann 条件と Dirichlet 条件が組み合わさった

$$a_1y(a) + a_2y^{'}(a) = \alpha, \quad b_1y(b) + b_2y^{'}(b) = \beta$$

などの境界条件を Robin 条件、あるいは混合境界条件と呼ぶ。

2.2.2 解の存在と一意性

この問題の解の一意存在に関し、Lees(1961) による次の結果が知られている。

定理 2.1 関数 f(x,y,z) は

$$D = \{(x,y,z) \mid a \leq x \leq b\ ,\ \ -\infty < y < \infty\ ,\ \ -\infty < z < \infty\}$$

において連続、かつ連続な偏導関数 f_y、f_z をもち、D 上

$$f_y \geq 0, \quad |f_z| \leq M \quad (M \text{ は正の整数})$$

を満たすとする。このとき境界値問題 (2.1)、(2.2) は $a \leq x \leq b$ において少なくとも C^2 級の解をただ一つもつ。

もちろん上記定理の仮定が成り立たなくても、(2.1)、(2.2) の解が存在する場合はあり得る。

2.3 Sturm-Liouville 型境界値問題

閉区間 $[a,b]$ で定義された、連続微分可能かつ正の関数 $p(x)$ と連続な非負値関数 $\sigma(x)$ を用いて表された次の自己随伴な微分式

$$L[y] \equiv -\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right) + \sigma(x)y \tag{2.4}$$

を考える。この形の微分作用素 L を Sturm-Liouville 作用素といい、微分方程式

$$L[y] = g(x) \quad (a < x < b) \tag{2.5}$$

$$g(x) \in C[a,b]$$

の解 $y(x)$ を境界条件

$$B_a[y] \equiv a_1 y(a) + a_2 y^{'}(a) = \alpha, \quad B_b[y] \equiv b_1 y(b) + b_2 y^{'}(b) = \beta \tag{2.6}$$

の元で求める問題を**Sturm-Liouville 型境界値問題** (**Sturm-Liouville Boundary Value Problem**) と呼ぶ。ただし、恒等的にゼロの解 $y(x) \equiv 0$ は除外する。この問題に対する解の一意存在は、**定理 2.1** により、明らかにただ一つの解 $y(x)$ を持つ。

2.3.1 境界条件の斉次化

境界条件を Dirichlet 条件に限り、いま、x の 1 次式 $l(x)$ を

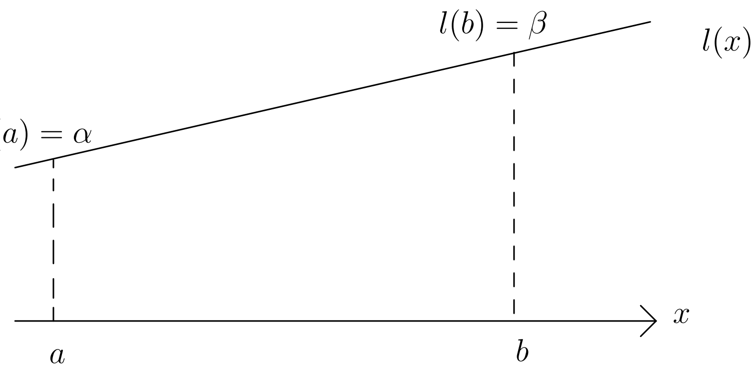

図 2.1: $l(x)$

上図のように、$l(a)=\alpha, l(b)=\beta$ を満たすように定めれば、$u(x)=y(x)-l(x)$ は明らかに

$$-\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{du}{dx}\right) + \sigma(x)u = g(x) - \sigma(x)l(x) + l^{'}(x)p^{'}(x) \quad (a < x < b)$$

$$u(a) = (b) = 0$$

を満たす。ゆえに、以下 (2.4)、(2.5)、(2.6) の代わりに、次の境界値問題を考える。

$$\left.\begin{aligned} -\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{du}{dx}\right) + \sigma(x)u = f(x) \quad (a < x < b) \\ u(a) = u(b) = 0 \end{aligned}\right\} \tag{2.7}$$

第 3 章

有限要素法

3.1　はじめに

この章では、微分方程式の境界値問題を数値的に解く手法として知られている有限要素法（Finite Element Method：FEM）の基礎事項ついて、1 次元の場合に限り述べる。

有限要素法は微分方程式を直接に扱うわけではない。方程式を積分により少し変形して扱うのが普通であり、その指導原理として用いられるものの一つとして弱形式（仮想仕事の原理）がある。

3.2　微分方程式と弱形式

2 階の微分という強い条件はそのままでは扱いずらいので、微分方程式を積分し 2 階の微分をなくす方向にもっていく。例として

$$\left.\begin{aligned} -\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{du}{dx}\right)+\sigma(x)u=f(x) \quad (a<x<b) \\ u(a)=u(b)=0 \end{aligned}\right\} \tag{3.1}$$

を考える。ただし、p, σ, f は与えられているとする。ここで $v=v(x)$ を

$$v(a)=v(b)=0 \tag{3.2}$$

を満たす（連続性、微分可能性などは別にして）任意の関数を適当に選ぶ。(3.1) の両辺に v をかけ、x について a から b まで積分すると

$$\int_a^b \{-(pu')'+\sigma u\}vdx=\int_a^b fvdx \tag{3.3}$$

となり、さらに (3.3) の左辺第一項に部分積分を施すと

$$\int_a^b \{pu'v'+\sigma uv\}dx+\Big[-pu'v\Big]_a^b=\int_a^b fvdx \tag{3.4}$$

となり、そして (3.4) は (3.2) から

$$\int_a^b \{pu'v'+\sigma uv\}dx=\int_a^b fvdx \tag{3.5}$$

となる。(3.5) はもとの微分方程式 (3.1) に対する**弱形式 (weak form)** と呼ばれる。(3.5) は (3.2) を満たす任意の v に対して成立していることがポイントである。

興味深いことに、関数 $u=u(x)$ が (3.5) を満たしているならば、必然的に (3.1) の微分方程式をも満足することが示される。すなわち、上記の逆の仮定が成立する。ただし、u は十分になめらかである必要がある。この事実、すなわちもとの (3.1) の微分方程式の代わりに弱形式 (3.5) の形で扱っても本質的には同じ問題が得られることを、力学、特に構造力学では**仮想仕事の原理**と呼ぶことがある。ここで記号を次のように定義しておく。

$$\begin{aligned} [u,v] &\equiv \int_a^b \{pu'v' + \sigma uv\}dx \\ (f,v) &\equiv \int_a^b fvdx \end{aligned}$$

すると、(3.5) は

$$[u,v]=(f,v) \tag{3.6}$$

と書ける。

3.3 Galerkin 法

3.3.1 関数近似

(3.6) を解くにあたって、直接未知関数 u を求めることは一般的には困難である。まずは未知関数 u を近似する関数（近似関数）を定める必要がある。近似関数の選び方として一般的なのは、既知の関数をいくつか選んで、その一次結合により u を近似する方法である。(3.6) における u の近似関数をまず

$$\hat{u}=\sum_{i=1}^{m} c_i\phi_i \tag{3.7}$$

と表す。ただし、$\phi_i(1 \leq i \leq m,\quad m$ は正の整数定数) は x の関数であり、互いに一次独立でしかも

$$\phi_i(a)=\phi_i(b)=0 \qquad (1 \leq i \leq m)$$

となるように選ぶ。c_i は任意の係数である。近似関数をこのように構成すれば、$\hat{u}$ は (3.1) の境界条件を常に満たす。

3.3.2 近似解の決定法

u の近似関数を (3.7) の $\hat{u}$ の形に仮定したが、係数 $c_i(1 \leq i \leq m)$ は現在のところ未定である。今 (3.1) の境界値問題ついて、その決定法を調べてみる。v は (3.2) を満たす任意の x の関数であるので、$v(x)$ として

$$\phi_j(a) = \phi_j(b) = 0 \quad (j = 1, 2, \cdots, m)$$

なる $\phi_j(x)$ と選ぶとする。これは明らかに (3.2) を満たす。この $\hat{u}$ と $\phi_j(x)$ を (3.6) に代入すると

$$[\hat{u}, \phi_j] = (f, \phi_j) \quad (j = 1, 2, \cdots, m) \tag{3.8}$$

$$\left[\sum_{i=1}^{m} c_i \phi_i, \quad \phi_j\right] = (f, \phi_j) \quad (j = 1, 2, \cdots, m) \tag{3.9}$$

となる。これら m 個の式を連立させ、行列式で表示すると

$$\begin{pmatrix} [\phi_1, \phi_1] & \cdots & [\phi_m, \phi_1] \\ \vdots & & \vdots \\ [\phi_1, \phi_m] & \cdots & [\phi_m, \phi_m] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (f, \phi_1) \\ \vdots \\ (f, \phi_m) \end{pmatrix} \tag{3.10}$$

となり、未知数の個数 m と方程式の数が一致し、この方程式から $c_i(1 \leq i \leq m)$ を求めることができ、近似関数 $\hat{u}$ を決定することができる。このようにして近似関数、近似解を求める方法を **Galerkin 法**という。

3.4 スプライン関数

閉区間 $[a, b]$ を n 個の区間に分割し、

$$\triangle : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

$$h_i = x_i - x_{i-1}, \quad h = \max_i h_i$$

とする。次の 2 条件を満たす区分的m次多項式 $S_{\triangle}^m(x)$ を分割 $\triangle$ に属するm次スプライン関数という。

- $S^m_\triangle(x) \in C^{m-1}[a,b]$

- $S^m_\triangle(x)$ は各小区間 $[x_i, x_{i+1}]$ においてm次多項式

3.5 区分的１次多項式を用いる有限要素法

有限要素法は Galerkin 法の特別な場合であって、ϕ_i としてスプライン関数を選ぶ方法である。今 (3.1) を解くのに区間 $[a,b]$ を

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

と n 分割し、u の近似関数を

$$u^*(x) = \sum_{i=1}^{n-1} c_i^* \phi_i(x) \tag{3.11}$$

とし、ϕ_i を

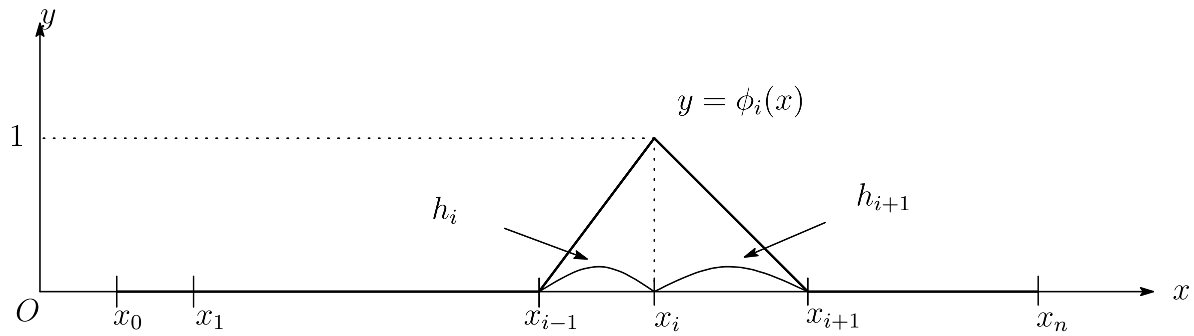

図 3.1: ϕ_i

$$\phi_i(x) = \begin{cases} \dfrac{x - x_{i-1}}{h_i} & (x_{i-1} \le x \le x_i) \\ \dfrac{x_{i+1} - x}{h_{i+1}} & (x_i < x \le x_{i+1}) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

というような１次スプライン関数とする。c_i^* は (3.10) の解であり必然的に $u(x)$ の $x = x_i$ における近似値となる。このようにして u を u^* で近似する方法を、**区分的１次多項式を用いる有限要素法**といい、u^* を**有限要素解**という。

(3.10) を書き直せば

$$\begin{pmatrix} [\phi_1,\phi_1] & \cdots & [\phi_{n-1},\phi_1] \\ \vdots & & \vdots \\ [\phi_1,\phi_{n-1}] & \cdots & [\phi_{n-1},\phi_{n-1}] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1^* \\ \vdots \\ c_{n-1}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (f,\phi_1) \\ \vdots \\ (f,\phi_{n-1}) \end{pmatrix} \tag{3.12}$$

となり、この連立 1 次方程式を**有限要素方程式**と呼ぶ。また、下図のような ϕ_i の位置関係

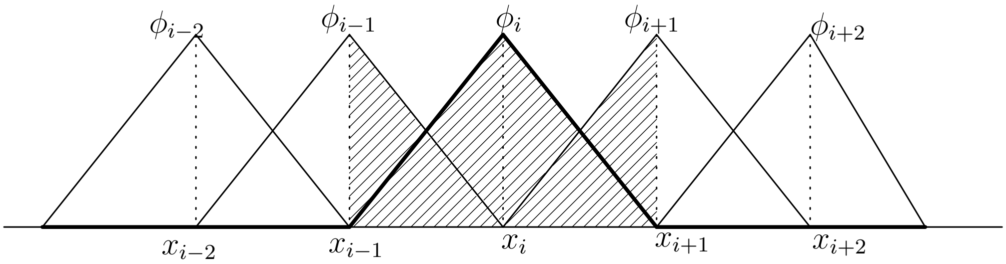

図 3.2: ϕ_i の位置関係

より、$|i-j| \geq 2$ ならば

$$[\phi_i,\phi_j] = 0$$

となる。よって有限要素方程式の係数行列は

$$\begin{pmatrix} [\phi_1,\phi_1] & [\phi_2,\phi_1] & & & \mathbf{0} \\ [\phi_2,\phi_1] & [\phi_2,\phi_2] & [\phi_2,\phi_3] & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & [\phi_{n-2},\phi_{n-3}] & [\phi_{n-2},\phi_{n-2}] & [\phi_{n-2},\phi_{n-1}] \\ \mathbf{0} & & & [\phi_{n-1},\phi_{n-2}] & [\phi_{n-1},\phi_{n-1}] \end{pmatrix}$$

というような **3 重対角行列**となる。

3.6 数値積分

有限要素方程式の係数行列に現れる数値積分を次のように行う。p と σ をそれぞれの小区間 $[x_{i-1},x_i]$、$[x_i,x_{i+1}]$ で定数とみなして、

$$[\phi_i,\phi_j] = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \left\{ p(x)\frac{d\phi_i}{dx}\frac{d\phi_j}{dx} + \sigma(x)\phi_i\phi_j \right\} dx \qquad (j = i-1,\ i,\ i+1)$$

$$= \frac{d\phi_i}{dx}\frac{d\phi_j}{dx}\int_{x_{i-1}}^{x_i} p(x)dx + \int_{x_{i-1}}^{x_i} \sigma(x)\phi_i\phi_j dx + \frac{d\phi_i}{dx}\frac{d\phi_j}{dx}\int_{x_i}^{x_{i+1}} p(x)dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \sigma(x)\phi_i\phi_j dx$$

$$
\begin{aligned}
\approx & \frac{d\phi_i}{dx}\frac{d\phi_j}{dx}p(\frac{x_i+x_{i-1}}{2})\int_{x_{i-1}}^{x_i}dx+\sigma(\frac{x_i+x_{i-1}}{2})\int_{x_{i-1}}^{x_i}\phi_i\phi_j dx \\
&\qquad +\frac{d\phi_i}{dx}\frac{d\phi_j}{dx}p(\frac{x_{i+1}+x_i}{2})\int_{x_i}^{x_{i+1}}dx+\sigma(\frac{x_{i+1}+x_i}{2})\int_{x_i}^{x_{i+1}}\phi_i\phi_j dx
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
= & \frac{d\phi_i}{dx}\frac{d\phi_j}{dx}p(\frac{x_i+x_{i-1}}{2})h_i+\phi_i\phi_j\sigma(\frac{x_i+x_{i-1}}{2})\int_{x_{i-1}}^{x_i}\phi_i\phi_j dx \\
&\qquad +\frac{d\phi_i}{dx}\frac{d\phi_j}{dx}p(\frac{x_{i+1}+x_i}{2})h_{i+1}+\phi_i\phi_j\sigma(\frac{x_{i+1}+x_i}{2})\int_{x_i}^{x_{i+1}}\phi_i\phi_j dx
\end{aligned}
$$

ここで

$$\bar{p_i}\equiv p(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}),\quad \bar{\sigma_i}\equiv\sigma(\frac{x_{i-1}+x_i}{2})$$

と置くと、$j=i$ のとき

$$[\phi_i,\phi_i]\approx\frac{1}{h_i}\bar{p_i}+\frac{h_i}{3}\bar{\sigma_i}+\frac{1}{h_{i+1}}\bar{p}_{i+1}+\frac{h_{i+1}}{3}\bar{\sigma}_{i+1}$$

$j=i+1$ のとき

$$[\phi_i,\phi_{i+1}]\approx-\frac{1}{h_{i+1}}\bar{p}_{i+1}+\frac{h_{i+1}}{6}\bar{\sigma}_{i+1}$$

$j=i-1$ のとき

$$[\phi_i,\phi_{i-1}]\approx-\frac{1}{h_i}\bar{p_i}+\frac{h_i}{6}\bar{\sigma_i}$$

と計算する。これは**中点則**に近いものとなる。有限要素法では数値積分の計算に時間がかかるので、差分法よりも計算時間が長くなると思われていたが、このように計算することによってかなりの計算量、計算時間の軽減になり、計算時間は差分法とさほど変わらなくなる。同様にして

$$\bar{f_j}\equiv f(\frac{x_{j-1}+x_j}{2})$$

と置いて

$$(f,\phi_j)=\int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}}f(x)\phi_j dx$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x)\phi_j dx + \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x)\phi_j dx \\
&\approx \bar{f}_j \int_{x_{j-1}}^{x_j} \phi_j dx + \bar{f_{j+1}} \int_{x_j}^{x_{j+1}} \phi_j dx \\
&= \frac{h_j}{2}\bar{f}_j + \frac{h_{j+1}}{2}\bar{f_{j+1}}
\end{aligned}
$$

と計算する。そして

$$
\bar{a_i} \equiv \frac{1}{h_i}\bar{p}_i, \quad \bar{b_i} \equiv \frac{h_i}{3}\bar{\sigma}_i
$$

と置いて、行列 c、d、$\hat{A}$、$\hat{B}$ を

$$
c \equiv \begin{pmatrix} c_1^* \\ c_2^* \\ \vdots \\ c_{n-2}^* \\ c_{n-1}^* \end{pmatrix}, \quad
d \equiv \begin{pmatrix} \frac{h_1}{2}\bar{f}_1 + \frac{h_2}{2}\bar{f}_2 \\ \frac{h_2}{2}\bar{f}_2 + \frac{h_3}{2}\bar{f}_3 \\ \vdots \\ \frac{h_{n-2}}{2}\bar{f_{n-2}} + \frac{h_{n-1}}{2}\bar{f_{n-1}} \\ \frac{h_{n-1}}{2}\bar{f_{n-1}} + \frac{h_n}{2}\bar{f}_n \end{pmatrix}
$$

$$
\hat{A} \equiv \begin{pmatrix}
\bar{a_1} + \bar{a_2} & -\bar{a_2} & & & \mathbf{0} \\
-\bar{a_2} & \bar{a_2} + \bar{a_3} & -\bar{a_3} & & \\
& \ddots & \ddots & \ddots & \\
& & -\bar{a_{n-2}} & \bar{a_{n-2}} + \bar{a_{n-1}} & -\bar{a_{n-1}} \\
\mathbf{0} & & & -\bar{a_{n-1}} & \bar{a_{n-1}} + \bar{a_n}
\end{pmatrix}
$$

$$
\hat{B} \equiv \begin{pmatrix}
\bar{b_1} + \bar{b_2} & \frac{\bar{b_2}}{2} & & & \mathbf{0} \\
\frac{\bar{b_2}}{2} & \bar{b_2} + \bar{b_3} & \frac{\bar{b_3}}{2} & & \\
& \ddots & \ddots & \ddots & \\
& & \frac{\bar{b_{n-1}}}{2} & \bar{b_{n-2}} + \bar{b_{n-1}} & \frac{\bar{b_{n-1}}}{2} \\
\mathbf{0} & & & \frac{\bar{b_{n-1}}}{2} & \bar{b_{n-1}} + \bar{b_n}
\end{pmatrix}
$$

と定義すると、有限要素方程式 (3.12) は

$$
(\hat{A} + \hat{B})c = d \tag{3.13}
$$

と書ける。

第 4 章

差分法

4.1 はじめに

この章では、微分方程式の近似解法の典型例である（有限）差分法（Finite Difference Method : FDM) の、1 次元の任意分点を用いる場合について述べる。差分法の基本的な考え方は、微分方程式に現れる導関数（微分商）を差分商で置き換えて、近似方程式を作成することである。1 階の導関数の近似方法、2 階の導関数の近似方法、Sturm-Liouville 型境界値問題への適用方法を示す。

4.2 1 階の導関数の差分近似

境界値問題

$$\begin{cases} -\dfrac{d}{dx}\left(p(x)\dfrac{du}{dx}\right) + \sigma(x)u = f(x) \quad (a < x < b) \\ u(a) = u(b) = 0 \end{cases}$$

において、区間 $[a, b]$ を

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b \tag{4.1}$$

と分割し、分点 $x_i (i = 0, 1, \cdots, n)$ を定め、刻み幅 h_i を

$$h_i = x_i - x_{i-1} \tag{4.2}$$

とするとき、$u(x)$ の $x = x_i$ における Taylor 展開は

$$u(x_i + h_{i+1}) = u(x_i) + h_{i+1}u'(x_i) + \frac{h_{i+1}^2}{2!}u''(x_i) + \frac{h_{i+1}^3}{3!}u'''(\xi_+) \tag{4.3}$$

$$u(x_i - h_i) = u(x_i) - h_i u'(x_i) + \frac{h_i^2}{2!}u''(x_i) - \frac{h_i^3}{3!}u'''(\xi_-) \tag{4.4}$$

と書ける。ただし

$$x_i < \xi_+ < x_i + h_{i+1}, \quad x_i - h_i < \xi_- < x_i$$

である。(4.3) と (4.4) の辺々を引くと

$$u(x_i + h_{i+1}) - u(x_i - h_i) = (h_{i+1} + h_i)u'(x_i) + \frac{h_{i+1}^2 - h_i^2}{2}u''(x_i) + \frac{h_{i+1}^3 u'''(\xi_+) + h_i^3 u'''(\xi_-)}{6}$$

となり、さらに両辺を $(h_{i+1}+h_i)$ で割って

$$\frac{u(x_i+h_{i+1})-u(x_i-h_i)}{h_{i+1}+h_i}=u^{'}(x_i)+\frac{h_{i+1}-h_i}{2}u^{''}(x_i)+\frac{h_{i+1}^3u^{'''}(\xi_+)+h_i^3u^{'''}(\xi_-)}{6(h_{i+1}+h_i)}$$

となる。ここで u の 2 階微分以上の項を打ち切って $x=x_i$ における $u(x)$ の 1 階の導関数を

$$\begin{aligned} u^{'}(x)|_{x=x_i} &\approx \frac{u(x_i+h_{i+1})-u(x_i-h_i)}{h_{i+1}+h_i} &(4.5)\\ &= \frac{u(x_{i+1})-u(x_{i-1})}{h_{i+1}+h_i} &(4.6)\end{aligned}$$

と近似する。(4.5) の右辺を**差分商**といい、このよう近似することを**差分近似**という。その誤差は

$$\frac{h_{i+1}-h_i}{2}u^{''}(x_i)+\frac{h_{i+1}^3u^{'''}(\xi_+)+h_i^3u^{'''}(\xi_-)}{6(h_{i+1}+h_i)}$$

であり、これを**局所離散化誤差**、あるいは**局所打ち切り誤差**と呼ぶ。よって (4.5) の精度は、

$$\begin{cases} o(h^2) & (h=h_{i+1}=h_i) \\ o(\bar{h}) & (h_{i+1}\neq h_i) \qquad \bar{h}=\max\,(h_{i+1},h_i) \end{cases}$$

である。

4.3 2 階の導関数の差分近似

$\dfrac{d}{dx}\left(p(x)\dfrac{du}{dx}\right)\cdots(1)$ を $x=x_i$ において近似することを考える。(4.1) と (4.2) に従って

$$x_{i+\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}(x_i+x_{i+1}),\quad x_{i-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}(x_i+x_{i-1})$$

を導入する。(4.5) を、h_{i+1} の代わりに $(x_{i+\frac{1}{2}}-x_i=)\dfrac{h_{i+1}}{2}$、$h_i$ の代わりに $(x_i-x_{i-\frac{1}{2}}=)\dfrac{h_i}{2}$ として (1) に対して適用すると

$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{du}{dx}\right)\bigg|_{x=x_i} \approx \frac{p(x_{i+\frac{1}{2}})\dfrac{du}{dx}\bigg|_{x=x_{i+\frac{1}{2}}} - p(x_{i-\frac{1}{2}})\dfrac{du}{dx}\bigg|_{x=x_{i-\frac{1}{2}}}}{\dfrac{h_{i+1}}{2}+\dfrac{h_i}{2}} \tag{4.7}$$

となる。次に (4.6) において、$(x_{i-1} \quad x_i \quad x_{i+1})$ の代わりに $(x_i \quad x_{i+\frac{1}{2}} \quad x_{i+1})$、あるいは $(x_{i-1} \quad x_{i-\frac{1}{2}} \quad x_i)$ とすると

$$\frac{du}{dx}\bigg|_{x=x_{i+\frac{1}{2}}} \approx \frac{u(x_{i+1})-u(x_i)}{\dfrac{h_{i+1}}{2}+\dfrac{h_{i+1}}{2}}$$

$$\frac{du}{dx}\bigg|_{x=x_{i-\frac{1}{2}}} \approx \frac{u(x_i)-u(x_{i-1})}{\dfrac{h_i}{2}+\dfrac{h_i}{2}}$$

となり、これらを (4.7) に代入すると

$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{du}{dx}\right)\bigg|_{x=x_i} \approx \frac{p(x_{i+\frac{1}{2}})\dfrac{u(x_{i+1})-u(x_i)}{\dfrac{h_{i+1}}{2}+\dfrac{h_{i+1}}{2}} - p(x_{i-\frac{1}{2}})\dfrac{u(x_i)-u(x_{i-1})}{\dfrac{h_i}{2}+\dfrac{h_i}{2}}}{\dfrac{h_{i+1}}{2}+\dfrac{h_i}{2}} \tag{4.8}$$

と、1 階の導関数の差分近似を 2 回用いることによって、2 階の導関数を近似することができる。これを **Shortley-Weller(S-W) 近似**という。ここで

$$p_{i+\frac{1}{2}} = p(x_{i+\frac{1}{2}}), \quad p_{i-\frac{1}{2}} = p(x_{i-\frac{1}{2}}), \quad u_i = u(x_i)$$

として、(4.8) を整理すると

$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{du}{dx}\right)\bigg|_{x=x_i} \approx \frac{p_{i+\frac{1}{2}}\dfrac{u_{i+1}-u_i}{h_{i+1}} - p_{i-\frac{1}{2}}\dfrac{u_i-u_{i-1}}{h_i}}{\dfrac{h_{i+1}+h_i}{2}} \tag{4.9}$$

と書ける。

4.4　差分方程式と Sturm-Liouville 型境界値問題への適用

Sturm-Liouville 型境界値問題（簡単のために区間を $[0,1]$ とする）

$$\left.\begin{array}{c} -\dfrac{d}{dx}\left(p(x)\dfrac{du}{dx}\right)+\sigma(x)u=f(x) \qquad (0<x<1) \\[2ex] u(0)=u(1)=0 \end{array}\right\} \tag{4.10}$$

$$p(x)\in C^1[0,1], \quad \sigma(x), f(x)\in C[0,1]$$

$$p(x)>0, \quad \sigma(x)\geq 0 \qquad (0\leq x\leq 1)$$

について考える。区間 $[0,1]$ を

$$0=x_0<x_1<\cdots<x_n=1, \qquad h_i=x_i-x_{i-1}$$

と n 分割し、分点 $x_i(i=0,1,\cdots,n)$ と刻み幅 h_i を定め

$$(p_{i+\frac{1}{2}}\equiv p_{i+1}), \qquad p_{i-\frac{1}{2}}\equiv p_i$$

$$\sigma(x_i)\equiv\sigma_i, \qquad f(x_i)\equiv f_i$$

と置いて、(4.10) に対して (4.9) を適用し、$u(x_i)\equiv u_i$ の近似解を U_i とすると

$$\left.\begin{array}{c} -\dfrac{p_{i+1}\dfrac{U_{i+1}-U_i}{h_{i+1}}-p_i\dfrac{U_i-U_{i-1}}{h_i}}{\dfrac{h_{i+1}+h_i}{2}}+\sigma_iU_i=f_i \quad (i=1,2,\cdots,n-1) \\[2ex] U_0=u_0=U_n=u_n=0 \end{array}\right\} \tag{4.11}$$

と、未知数 $U_i(i=1,2,\cdots,n-1)$ に対する $n-1$ 元連立一次方程式が得られる。これを **(有限) 差分方程式**と呼び、U_i を**（有限）差分解**と呼ぶ。(4.11) を整理すると

$$\frac{2}{h_{i+1}+h_i}\left\{\left(-\frac{p_i}{h_i}\right)U_{i-1}+\left(\frac{p_{i+1}}{h_{i+1}}+\frac{p_i}{h_i}+\frac{h_{i+1}+h_i}{2}\sigma_i\right)U_i+\left(-\frac{p_{i+1}}{h_{i+1}}\right)U_{i+1}\right\}=f_i \tag{4.12}$$

$$(i=1,2,\cdots,n-1)$$

となる。ここで

$$a_i \equiv \frac{1}{h_i} p_i, \qquad b_i \equiv \frac{h_i + h_{i+1}}{2} \sigma_i$$

と置いて、行列 H、U、f、A、B を

$$H \equiv \begin{pmatrix} \frac{2}{h_1+h_2} & & & & \mathbf{0} \\ & \frac{2}{h_2+h_3} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \frac{2}{h_{n-2}+h_{n-1}} & \\ \mathbf{0} & & & & \frac{2}{h_{n-1}+h_n} \end{pmatrix}, \quad U \equiv \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_{n-2} \\ U_{n-1} \end{pmatrix}, \quad f \equiv \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{n-2} \\ f_{n-1} \end{pmatrix}$$

$$A \equiv \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & -a_2 & & & \mathbf{0} \\ -a_2 & a_2 + a_3 & -a_3 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -a_{n-2} & a_{n-2} + a_{n-1} & -a_{n-1} \\ \mathbf{0} & & & -a_{n-1} & a_{n-1} + a_n \end{pmatrix}$$

$$B \equiv \begin{pmatrix} b_1 & & & & \mathbf{0} \\ & b_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & b_{n-2} & \\ \mathbf{0} & & & & b_{n-1} \end{pmatrix}$$

とそれぞれ定義すると、(4.12) は

$$H(A + B)U = f \tag{4.13}$$

と行列式で表現できる。行列 $H(A + B)$ は 3 重対角でスパースな非常に性質のよい行列であり、(4.13) の連立一次方程式は適当な解法によって解くことができる。

第 5 章

数値実験

5.1 はじめに

この章では、実際に Sturm-Liouville 型境界値問題の数値例をいくつか取り上げ、有限要素法と差分法を適用し数値実験を行い、その数値実験結果および精度に関する評価を述べる。

5.2 数値実験環境

数値実験の環境として

CPU	Pentium4 2.26GHz
主記憶量	256MB
OS	WindowsXP

のマシン上で、数値計算ツールとして MATLAB(version 6.5.1) 用いて数値実験を行った。

5.3 数値例

5.3.1 用いた分割

すべての数値例では簡単のために、区間を $[0,1]$ とした。次の表 5.1 と表 5.2 に示す通り、開区間 $(0,0.1)$ での乱数を MATLAB の rand 関数を用いて 20 個、その合計が 1 となるように発生させ、まず区間 $[0,1]$ を 20 分割する分割を作る。その分割を元にし、「各分点の中点を取り分割数を倍にする」という操作を繰り返し、分割数を 20、40、80、160、320、640、1280 と増やし、刻みを細かくしていくという分割パターンを 2 つ（分割パターン 1 と分割パターン 2）作る。それらの分割パターンを用いて数値実験することにより誤差の収束性を見る。

分点:x_i	値	刻み幅:$h_i = x_i - x_{i-1}$	値
x_0	0	-	-
x_1	3.0621e-002	h_1	3.0621e-002
x_2	4.1837e-002	h_2	1.1216e-002
x_3	8.6166e-002	h_3	4.4329e-002
x_4	1.3284e-001	h_4	4.6674e-002
x_5	1.3431e-001	h_5	1.4700e-003
x_6	2.0071e-001	h_6	6.6400e-002
x_7	2.7312e-001	h_7	7.2410e-002
x_8	3.0128e-001	h_8	2.8160e-002
x_9	3.2747e-001	h_9	2.6190e-002
x_{10}	3.9831e-001	h_{10}	7.0840e-002
x_{11}	4.7670e-001	h_{11}	7.8390e-002
x_{12}	5.7531e-001	h_{12}	9.8610e-002
x_{13}	6.2265e-001	h_{13}	4.7340e-002
x_{14}	7.1293e-001	h_{14}	9.0280e-002
x_{15}	7.5804e-001	h_{15}	4.5110e-002
x_{16}	8.3849e-001	h_{16}	8.0450e-002
x_{17}	9.2137e-001	h_{17}	8.2880e-002
x_{18}	9.3800e-001	h_{18}	1.6630e-002
x_{19}	9.7739e-001	h_{19}	3.9390e-002
x_{20}	1	h_{20}	2.2610e-002

表 5.1: 分割パターン 1 の元となる分割

分点:x_i	値	刻み幅:$h_i = x_i - x_{i-1}$	値
x_0	0	-	-
x_1	9.3310e-002	h_1	9.3310e-002
x_2	9.9623e-002	h_2	6.3130e-003
x_3	1.2604e-001	h_3	2.6417e-002
x_4	2.2600e-001	h_4	9.9960e-002
x_5	2.4720e-001	h_5	2.1200e-002
x_6	2.9704e-001	h_6	4.9840e-002
x_7	3.2609e-001	h_7	2.9050e-002
x_8	3.9336e-001	h_8	6.7270e-002
x_9	4.8916e-001	h_9	9.5800e-002
x_{10}	5.6582e-001	h_{10}	7.6660e-002
x_{11}	6.3243e-001	h_{11}	6.6610e-002
x_{12}	6.4552e-001	h_{12}	1.3090e-002
x_{13}	6.5506e-001	h_{13}	9.5400e-003
x_{14}	6.5655e-001	h_{14}	1.4900e-003
x_{15}	6.8537e-001	h_{15}	2.8820e-002
x_{16}	7.6704e-001	h_{16}	8.1670e-002
x_{17}	8.6559e-001	h_{17}	9.8550e-002
x_{18}	8.6733e-001	h_{18}	1.7400e-003
x_{19}	9.4927e-001	h_{19}	8.1940e-002
x_{20}	1	h_{20}	5.0730e-002

表 5.2: 分割パターン 2 の元となる分割

5.3.2　数値例 1

Sturm-Liouville 型境界値問題

$$\begin{cases} -\dfrac{d}{dx}\left(p(x)\dfrac{du}{dx}\right) + \sigma(x)u = f(x) \quad (0 < x < 1) \\ u(0) = 0,\ u(1) = 0 \end{cases}$$

において

$$\begin{aligned} p(x) &= e^x \\ \sigma(x) &= \pi^2 e^x \\ f(x) &= \pi e^x (2\pi \sin \pi x - \cos \pi x) \end{aligned}$$

とする。厳密解は

$$u(x) = \sin \pi x$$

である。そのグラフを以下に示す。

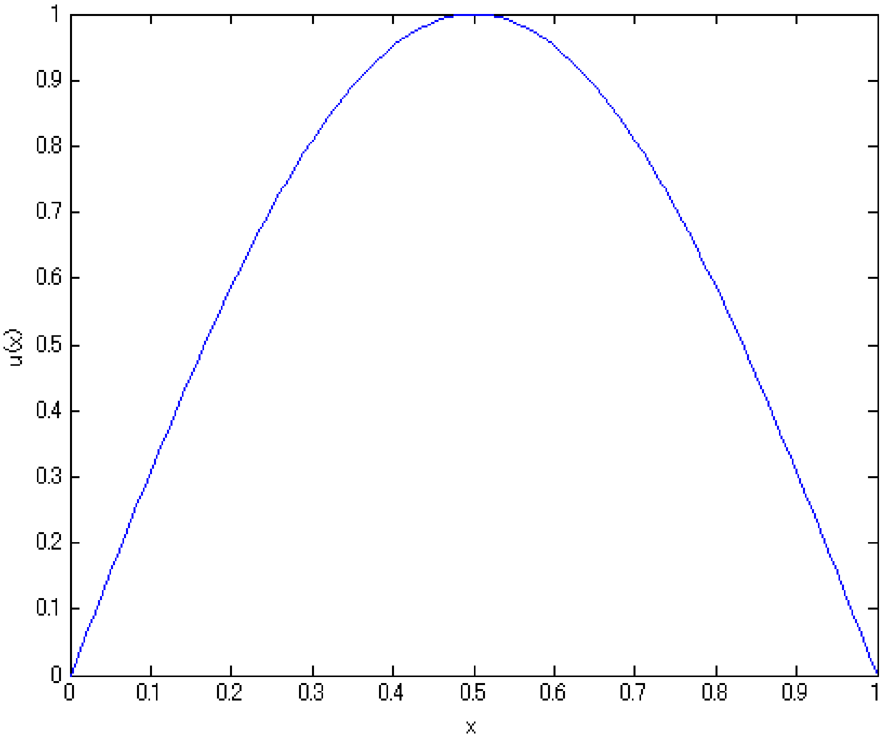

図 5.1: 数値例 1 の厳密解のグラフ

5.3.3　数値例 2

Sturm-Liouville 型境界値問題

$$\begin{cases} -\dfrac{d}{dx}\left(p(x)\dfrac{du}{dx}\right) + \sigma(x)u = f(x) \quad (0 < x < 1) \\ u(0) = 0,\ u(1) = 0 \end{cases}$$

において

$$\begin{aligned} p(x) &= x+1 \\ \sigma(x) &= e^x \\ f(x) &= e^{x+\sin 4\pi x} - e^x - 4\pi\cos 4\pi e^{\sin 4\pi x} + 16\pi^2(x+1)e^{\sin 4\pi x}(\sin 4\pi x - \cos^2 4\pi x) \end{aligned}$$

とする。厳密解は

$$u(x) = e^{\sin(4\pi x)} - 1$$

である。そのグラフを以下に示す。

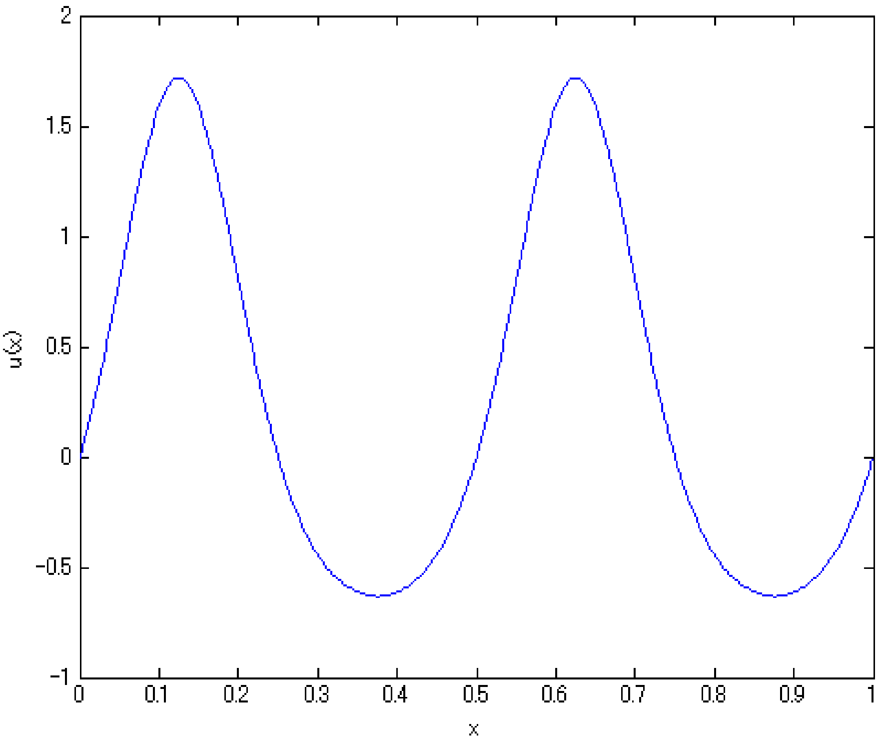

図 5.2: 数値例 2 の厳密解のグラフ

5.3.4 数値例 3

Sturm-Liouville 型境界値問題

$$\begin{cases} -\dfrac{d}{dx}\left(p(x)\dfrac{du}{dx}\right) + \sigma(x)u = f(x) \quad (0 < x < 1) \\ u(0) = 0,\ u(1) = 0 \end{cases}$$

において

$$\begin{aligned} p(x) &= 1 \\ \sigma(x) &= 100 \\ f(x) &= -2\pi^2 \cos 2\pi x - 100\cos^2 \pi x \end{aligned}$$

とする。厳密解は

$$u(x) = \frac{e^{10} - 1}{e^{20} - 1}(e^{10x} + e^{10}e^{-10x}) - \cos^2 \pi x$$

である。そのグラフを以下に示す。

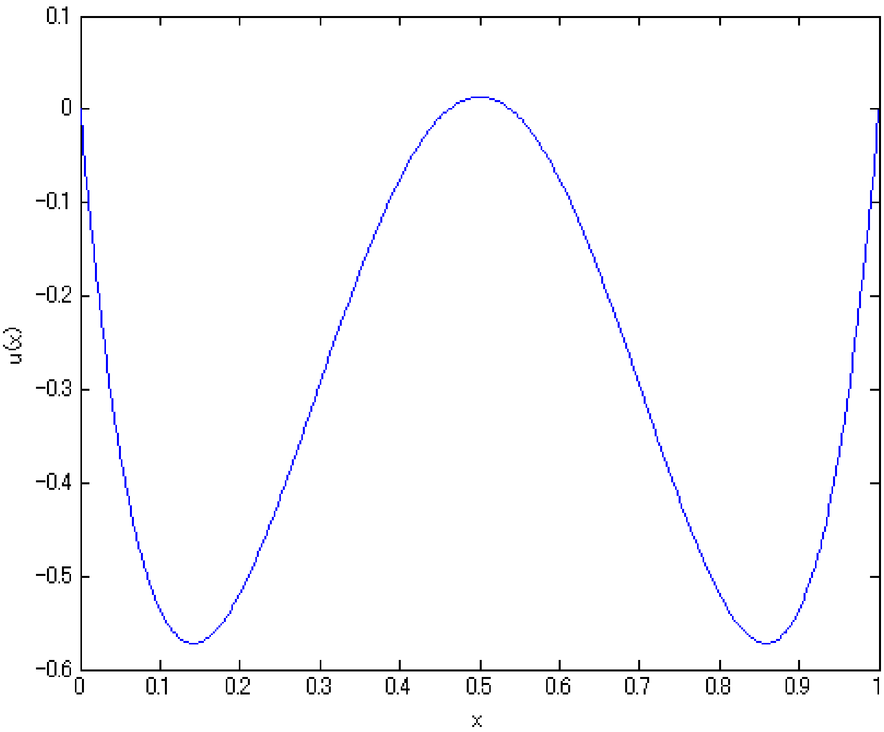

図 5.3: 数値例 3 の厳密解のグラフ

5.4　適用した数値解法

5.4.1　有限要素法

各数値例に対して、区分的１次多項式を用いる有限要素法を適用し、有限要素方程式を構成する。有限要素方程式の係数行列の各要素を数値積分する際には、3.6 節で示した通り、中点則を用いて行った。MATLAB 上で有限要素方程式を構成し、MATLAB のバックスラッシュ演算子を用いて有限要素方程式解き、有限要素解の結合係数 c_i^* を求めた。

5.4.2　差分法

有限要素法の場合と同様にして、各数値例に対して差分法を適用する。2 階の導関数を Shortley-Weller 近似で差分近似し、差分方程式を導く。MATLAB 上で差分方程式を構成し、MATLAB のバックスラッシュ演算子を用いて差分方程式を解き、差分解 U_i を求めた。

5.5　数値実験結果

有限要素法と差分法の精度を評価するにあたり、絶対誤差の最大値

$$\max_i |u_i - c_i^*|$$
$$\max_i |u_i - U_i|$$

と、1 ノルム

$$\begin{aligned} ||u - u^*||_1 &= \int_0^1 |u - u^*| dx \\ &\approx \sum_{i=0}^{n-1} \frac{|u_i - c_i^*| + |u_{i+1} - c_{i+1}^*|}{2} h_{i+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ||u - U||_1 &= \int_0^1 |u - U| dx \\ &\approx \sum_{i=0}^{n-1} \frac{|u_i - U_i| + |u_{i+1} - U_{i+1}|}{2} h_{i+1} \end{aligned}$$

とを求めた。

5.5.1 数値例 1 の結果

分割数	$h = \max_i h_i$	有限要素法 (FEM)		差分法 (FDM)	
		$\max_i \lvert u_i - c_i^* \rvert$	$\dfrac{\max_i \lvert u_i - c_i^* \rvert}{h^2}$	$\max_i \lvert u_i - U_i \rvert$	$\dfrac{\max_i \lvert u_i - U_i \rvert}{h^2}$
20	9.8616e-002	3.2467e-003	3.3389e-001	1.1697e-003	1.2029e-001
40	4.9308e-002	8.1017e-004	3.3327e-001	2.9208e-004	1.2015e-001
80	2.4654e-002	2.0245e-004	3.3311e-001	7.2998e-005	1.2011e-001
160	1.2327e-002	5.0606e-005	3.3307e-001	1.8248e-005	1.2010e-001
320	6.1635e-003	1.2651e-005	3.3306e-001	4.5620e-006	1.2010e-001
640	3.0817e-003	3.1628e-006	3.3306e-001	1.1405e-006	1.2010e-001
1280	1.5409e-003	7.9069e-007	3.3306e-001	2.8512e-007	1.2010e-001

表 5.3: 数値例 1(分割パターン 1) における絶対誤差の最大値の数値結果

分割数	$h = \max_i h_i$	有限要素法 (FEM)		差分法 (FDM)	
		$\lvert\lvert u - u^* \rvert\rvert_1$	$\dfrac{\lvert\lvert u - u^* \rvert\rvert_1}{h^2}$	$\lvert\lvert u - U \rvert\rvert_1$	$\dfrac{\lvert\lvert u - U \rvert\rvert_1}{h^2}$
20	9.8616e-002	1.6607e-003	1.7079e-001	6.3892e-004	6.5706e-002
40	4.9308e-002	4.1439e-004	1.7046e-001	1.5719e-004	6.4659e-002
80	2.4654e-002	1.0355e-004	1.7038e-001	3.9122e-005	6.4372e-002
160	1.2327e-002	2.5884e-005	1.7036e-001	9.7678e-006	6.4289e-002
320	6.1635e-003	6.4708e-006	1.7036e-001	2.4414e-006	6.4274e-002
640	3.0817e-003	1.6177e-006	1.7036e-001	6.1028e-007	6.4267e-002
1280	1.5409e-003	4.0442e-007	1.7036e-001	1.5257e-007	6.4267e-002

表 5.4: 数値例 1(分割パターン 1) における 1 ノルムの数値結果

有限要素法、差分法共に、分割数を倍にすると絶対誤差の最大値も 1 ノルムも約 $\frac{1}{4}$ になっている。また、この例では、絶対誤差の最大値で評価しても、1 ノルムで評価しても差分法の方が精度が良い。その様子を以下の図 5.4 と図 5.5 に表す。

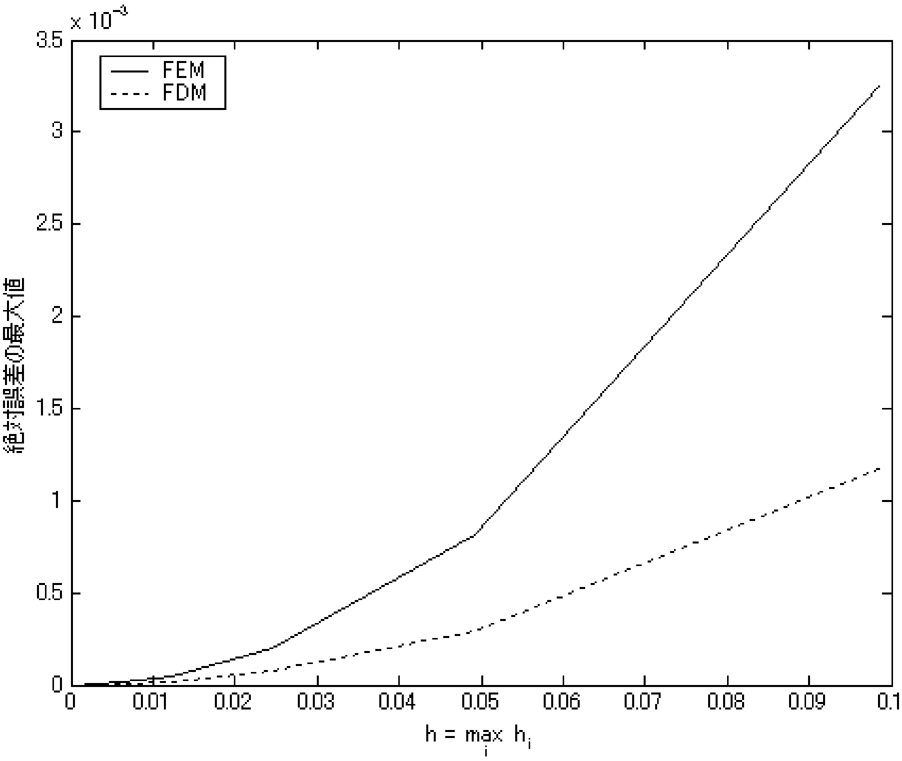

図 5.4: 数値例 1(分割パターン 1) における絶対誤差の最大値評価による精度比較

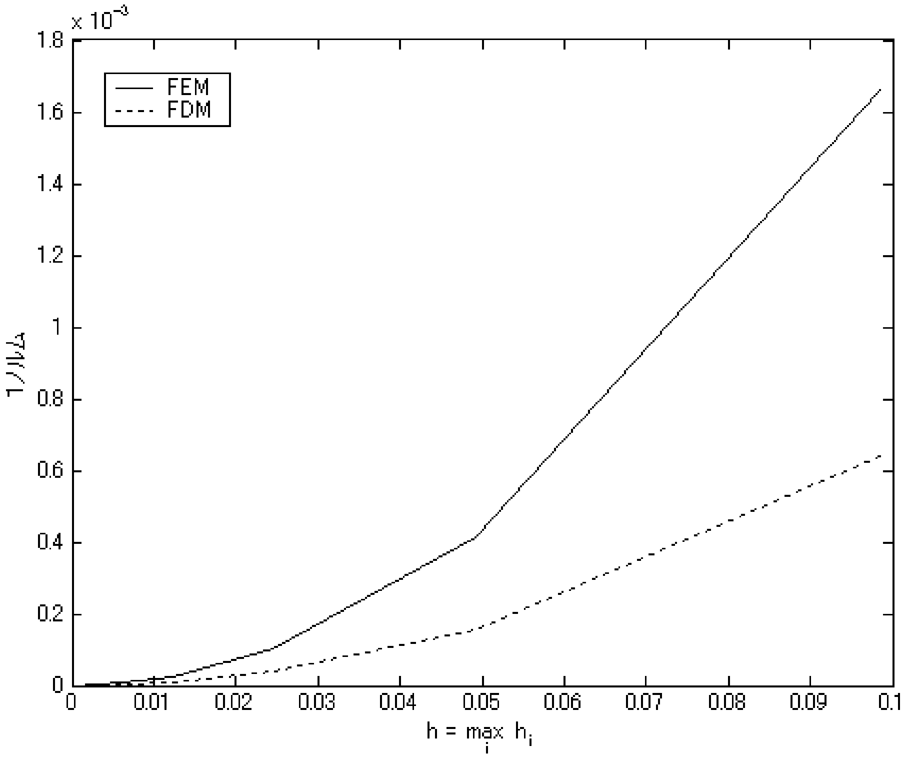

図 5.5: 数値例 1(分割パターン 1) における 1 ノルム評価による精度比較

分割数	$h = \max_i h_i$	有限要素法 (FEM)		差分法 (FDM)	
		$\max_i \lvert u_i - c_i^* \rvert$	$\dfrac{\max_i \lvert u_i - c_i^* \rvert}{h^2}$	$\max_i \lvert u_i - U_i \rvert$	$\dfrac{\max_i \lvert u_i - U_i \rvert}{h^2}$
20	9.9960e-002	1.5439e-003	1.5452e-001	3.0403e-003	3.0427e-001
40	4.9980e-002	3.8700e-004	1.5492e-001	7.6409e-004	3.0588e-001
80	2.4990e-002	9.6813e-005	1.5502e-001	1.9128e-004	3.0629e-001
160	1.2495e-002	2.4207e-005	1.5505e-001	4.7835e-005	3.0639e-001
320	6.2475e-003	6.0520e-006	1.5506e-001	1.1960e-005	3.0642e-001
640	3.1238e-003	1.5130e-006	1.5506e-001	2.9900e-006	3.0642e-001
1280	1.5619e-003	3.7826e-007	1.5506e-001	7.4751e-007	3.0642e-001

表 5.5: 数値例 1(分割パターン 2) における絶対誤差の最大値の数値結果

分割数	$h = \max_i h_i$	有限要素法 (FEM)		差分法 (FDM)	
		$\lvert\lvert u - u^* \rvert\rvert_1$	$\dfrac{\lvert\lvert u - u^* \rvert\rvert_1}{h^2}$	$\lvert\lvert u - U \rvert\rvert_1$	$\dfrac{\lvert\lvert u - U \rvert\rvert_1}{h^2}$
20	9.9960e-002	5.9071e-004	5.9118e-002	1.6049e-003	1.6062e-001
40	4.9980e-002	1.3034e-004	5.2178e-002	4.0109e-004	1.6057e-001
80	2.4990e-002	3.1763e-005	5.0862e-002	1.0032e-004	1.6064e-001
160	1.2495e-002	7.8866e-006	5.0515e-002	2.5075e-005	1.6061e-001
320	6.2475e-003	1.9672e-006	5.0400e-002	6.2694e-006	1.6063e-001
640	3.1238e-003	4.9164e-007	5.0384e-002	1.5674e-006	1.6063e-001
1280	1.5619e-003	1.2289e-007	5.0378e-002	3.9185e-007	1.6063e-001

表 5.6: 数値例 1(分割パターン 2) における 1 ノルムの数値結果

有限要素法、差分法共に、分割数を倍にすると絶対誤差の最大値も１ノルムも約 $\frac{1}{4}$ になっている。また、この例では、絶対誤差の最大値で評価しても、１ノルムで評価しても有限要素法の方が精度が良い。その様子を以下の図 5.6 と図 5.7 に表す。

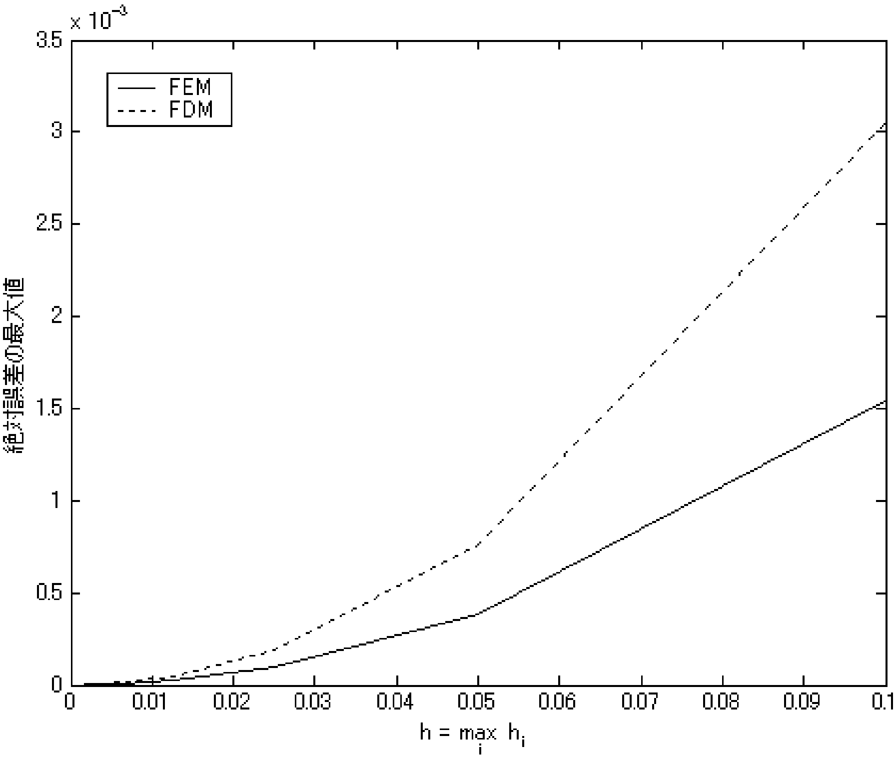

図 5.6: 数値例 1(分割パターン 2) における絶対誤差の最大値評価による精度比較

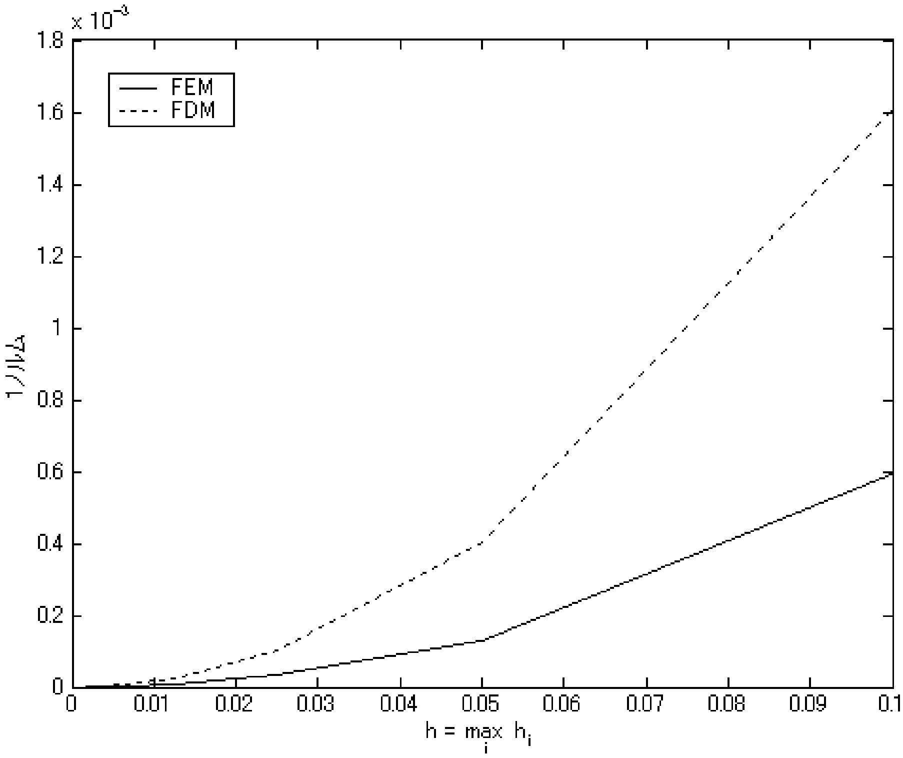

図 5.7: 数値例 1(分割パターン 2) における 1 ノルム評価による精度比較

5.5.2 数値例 2 の結果

分割数	$h = \max_i h_i$	有限要素法 (FEM)		差分法 (FDM)	
		$\max_i \lvert u_i - c_i^* \rvert$	$\dfrac{\max_i \lvert u_i - c_i^* \rvert}{h^2}$	$\max_i \lvert u_i - U_i \rvert$	$\dfrac{\max_i \lvert u_i - U_i \rvert}{h^2}$
20	9.8616e-002	7.6571e-001	7.8735e+001	1.2923e+000	1.3288e+002
40	4.9308e-002	1.3505e-001	5.5546e+001	2.6068e-001	1.0722e+002
80	2.4654e-002	3.1065e-002	5.1110e+001	6.2120e-002	1.0220e+002
160	1.2327e-002	7.6105e-003	5.0084e+001	1.5352e-002	1.0103e+002
320	6.1635e-003	1.8931e-003	4.9833e+001	3.8272e-003	1.0075e+002
640	3.0817e-003	4.7267e-004	4.9770e+001	9.5612e-004	1.0067e+002
1280	1.5409e-003	1.1813e-004	4.9754e+001	2.3899e-004	1.0066e+002

表 5.7: 数値例 2(分割パターン 1) における絶対誤差の最大値の数値結果

分割数	$h = \max_i h_i$	有限要素法 (FEM)		差分法 (FDM)	
		$\lvert\lvert u - u^* \rvert\rvert_1$	$\dfrac{\lvert\lvert u - u^* \rvert\rvert_1}{h^2}$	$\lvert\lvert u - U \rvert\rvert_1$	$\dfrac{\lvert\lvert u - U \rvert\rvert_1}{h^2}$
20	9.8616e-002	3.3875e-001	3.4832e+001	5.4056e-001	5.5584e+001
40	4.9308e-002	5.4483e-002	2.2409e+001	1.0171e-001	4.1834e+001
80	2.4654e-002	1.2336e-002	2.0295e+001	2.3964e-002	3.9426e+001
160	1.2327e-002	3.0112e-003	1.9816e+001	5.9073e-003	3.8876e+001
320	6.1635e-003	7.4835e-004	1.9699e+001	1.4717e-003	3.8741e+001
640	3.0817e-003	1.8681e-004	1.9670e+001	3.6761e-004	3.8707e+001
1280	1.5409e-003	4.6686e-005	1.9663e+001	9.1883e-005	3.8699e+001

表 5.8: 数値例 2(分割パターン 1) における 1 ノルムの数値結果

有限要素法、差分法共に、分割数を倍にすると絶対誤差の最大値も 1 ノルムも $\frac{1}{4}$ 以下になっている。また、この例では、絶対誤差の最大値で評価しても、1 ノルムで評価しても有限要素法の方が精度が良い。その様子を以下の図 5.8 と図 5.9 に表す。

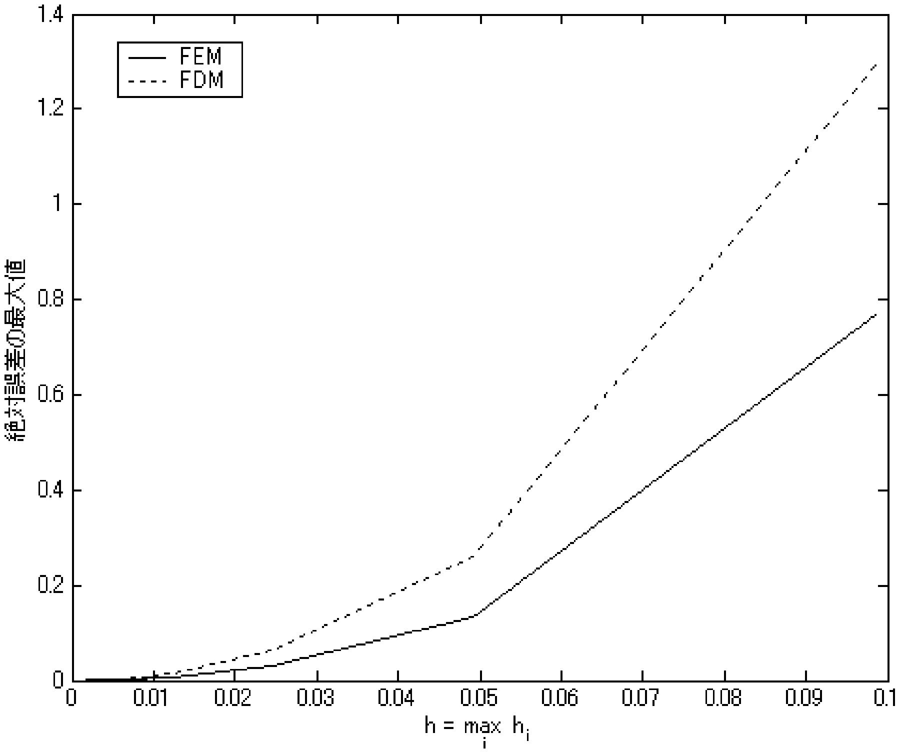

図 5.8: 数値例 2(分割パターン 1) における絶対誤差の最大値評価による精度比較

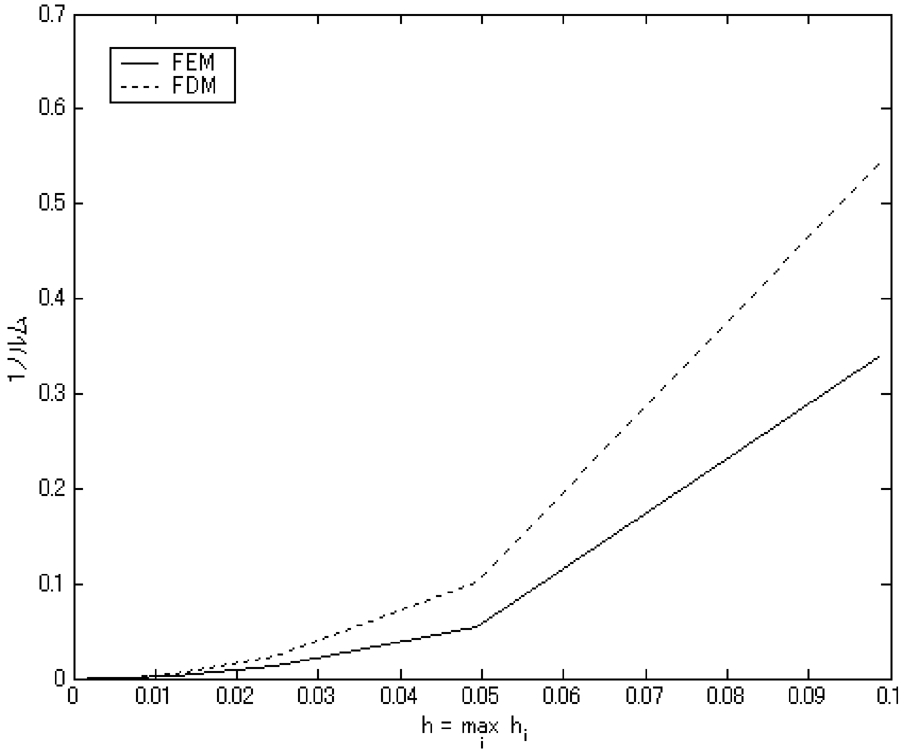

図 5.9: 数値例 2(分割パターン 1) における 1 ノルム評価による精度比較

分割数	$h=\max_i h_i$	有限要素法 (FEM)		差分法 (FDM)	
		$\max_i \lvert u_i - c_i^*\rvert$	$\dfrac{\max_i \lvert u_i - c_i^*\rvert}{h^2}$	$\max_i \lvert u_i - U_i\rvert$	$\dfrac{\max_i \lvert u_i - U_i\rvert}{h^2}$
20	9.9960e-002	5.6460e-001	5.6505e+001	9.3717e-001	9.3792e+001
40	4.9980e-002	1.1397e-001	4.5623e+001	2.1899e-001	8.7666e+001
80	2.4990e-002	2.8304e-002	4.5322e+001	5.4550e-002	8.7351e+001
160	1.2495e-002	7.0638e-003	4.5245e+001	1.3625e-002	8.7270e+001
320	6.2475e-003	1.7652e-003	4.5225e+001	3.4055e-003	8.7250e+001
640	3.1238e-003	4.4125e-004	4.5221e+001	8.5132e-004	8.7245e+001
1280	1.5619e-003	1.1031e-004	4.5219e+001	2.1283e-004	8.7244e+001

表 5.9: 数値例 2(分割パターン 2) における絶対誤差の最大値の数値結果

分割数	$h=\max_i h_i$	有限要素法 (FEM)		差分法 (FDM)	
		$\lvert\lvert u-u^*\rvert\rvert_1$	$\dfrac{\lvert\lvert u-u^*\rvert\rvert_1}{h^2}$	$\lvert\lvert u-U\rvert\rvert_1$	$\dfrac{\lvert\lvert u-U\rvert\rvert_1}{h^2}$
20	9.9960e-002	2.6234e-001	2.6255e+001	4.7922e-001	4.7961e+001
40	4.9980e-002	5.8603e-002	2.3460e+001	1.1147e-001	4.4625e+001
80	2.4990e-002	1.4460e-002	2.3155e+001	2.7627e-002	4.4238e+001
160	1.2495e-002	3.6035e-003	2.3081e+001	6.8921e-003	4.4145e+001
320	6.2475e-003	9.0015e-004	2.3062e+001	1.7221e-003	4.4122e+001
640	3.1238e-003	2.2499e-004	2.3058e+001	4.3048e-004	4.4116e+001
1280	1.5619e-003	5.6246e-005	2.3057e+001	1.0762e-004	4.4115e+001

表 5.10: 数値例 2(分割パターン 2) における 1 ノルムの数値結果

有限要素法、差分法共に、分割数を倍にすると絶対誤差の最大値も１ノルムも約 $\frac{1}{4}$ になっている。また、この例では、絶対誤差の最大値で評価しても、１ノルムで評価しても有限要素法の方が精度が良い。その様子を以下の図 5.10 と図 5.11 に表す。

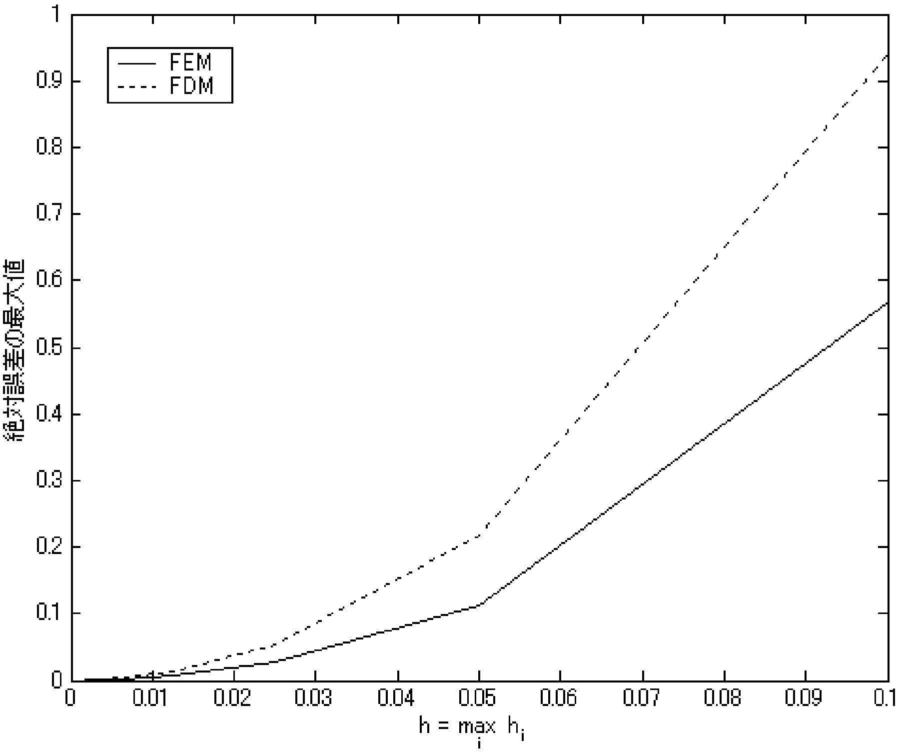

図 5.10: 数値例 2(分割パターン 2) における絶対誤差の最大値評価による精度比較

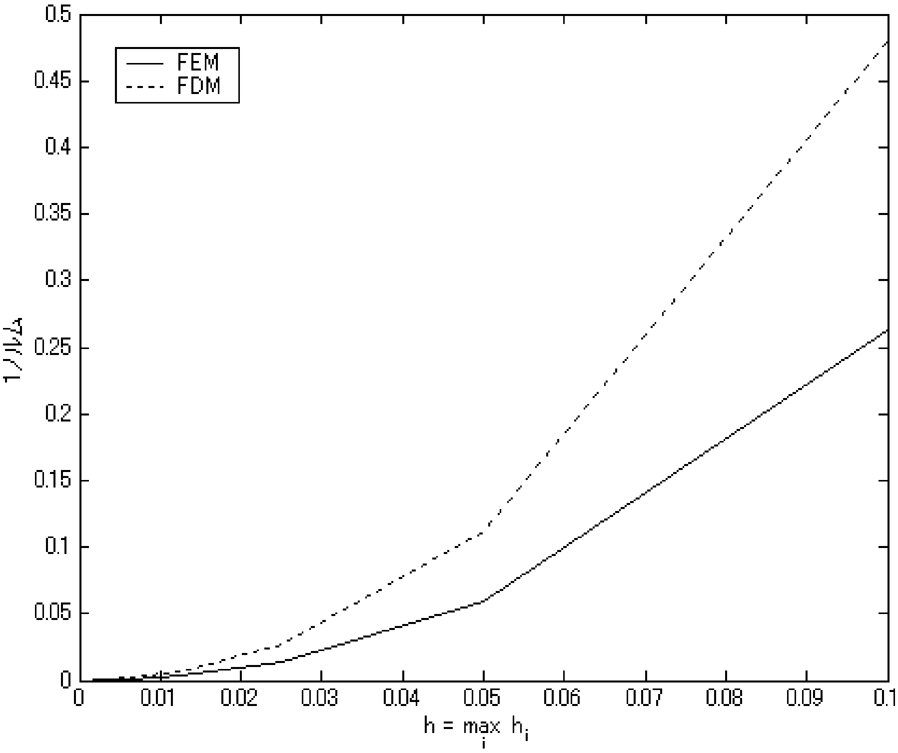

図 5.11: 数値例 2(分割パターン 2) における 1 ノルム評価による精度比較

5.5.3 数値例 3 の結果

分割数	$h = \max_i h_i$	有限要素法 (FEM)		差分法 (FDM)	
		$\max_i \lvert u_i - c_i^* \rvert$	$\dfrac{\max_i \lvert u_i - c_i^* \rvert}{h^2}$	$\max_i \lvert u_i - U_i \rvert$	$\dfrac{\max_i \lvert u_i - U_i \rvert}{h^2}$
20	9.8616e-002	7.5530e-003	7.7665e-001	1.3265e-002	1.3640e+000
40	4.9308e-002	1.8409e-003	7.5717e-001	3.5150e-003	1.4458e+000
80	2.4654e-002	4.5748e-004	7.5267e-001	8.9240e-004	1.4682e+000
160	1.2327e-002	1.1420e-004	7.5156e-001	2.2397e-004	1.4740e+000
320	6.1635e-003	2.8540e-005	7.5129e-001	5.6048e-005	1.4754e+000
640	3.0817e-003	7.1344e-006	7.5122e-001	1.4016e-005	1.4758e+000
1280	1.5409e-003	1.7836e-006	7.5120e-001	3.5041e-006	1.4759e+000

表 5.11: 数値例 3(分割パターン 1) における絶対誤差の最大値の数値結果

分割数	$h = \max_i h_i$	有限要素法 (FEM)		差分法 (FDM)	
		$\lvert\lvert u - u^* \rvert\rvert_1$	$\dfrac{\lvert\lvert u - u^* \rvert\rvert_1}{h^2}$	$\lvert\lvert u - U \rvert\rvert_1$	$\dfrac{\lvert\lvert u - U \rvert\rvert_1}{h^2}$
20	9.8616e-002	3.2234e-003	7.7665e-001	2.8981e-003	2.9800e-001
40	4.9308e-002	7.8594e-004	7.5717e-001	7.2424e-004	2.9789e-001
80	2.4654e-002	1.9493e-004	7.5267e-001	1.7945e-004	2.9524e-001
160	1.2327e-002	4.8706e-005	7.5156e-001	4.4580e-005	2.9338e-001
320	6.1635e-003	1.2174e-005	7.5129e-001	1.1136e-005	2.9313e-001
640	3.0817e-003	3.0431e-006	7.5122e-001	2.7833e-006	2.9307e-001
1280	1.5409e-003	7.6076e-007	7.5120e-001	6.9579e-007	2.9305e-001

表 5.12: 数値例 3(分割パターン 1) における 1 ノルムの数値結果

有限要素法、差分法共に、分割数を倍にすると絶対誤差の最大値も１ノルムも約 $\frac{1}{4}$ になっている。また、この例では、絶対誤差の最大値で評価すると有限要素法の方が精度がよく、１ノルムで評価すると差分法の方が精度が良い。その様子を以下の図 5.12 と図 5.13 に表す。

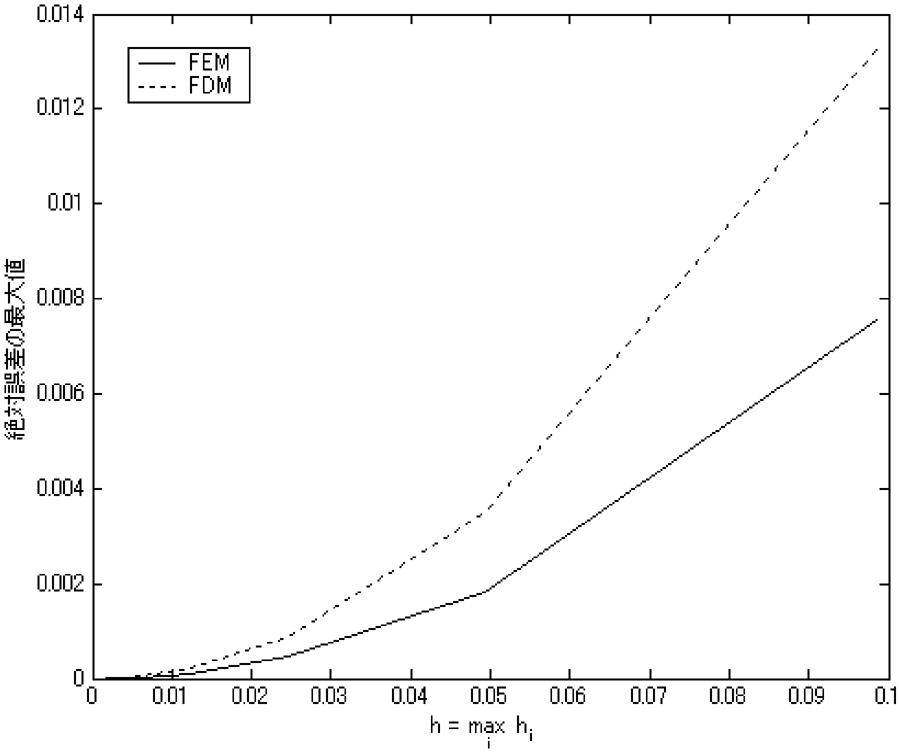

図 5.12: 数値例 3(分割パターン 1) における絶対誤差の最大値評価による精度比較

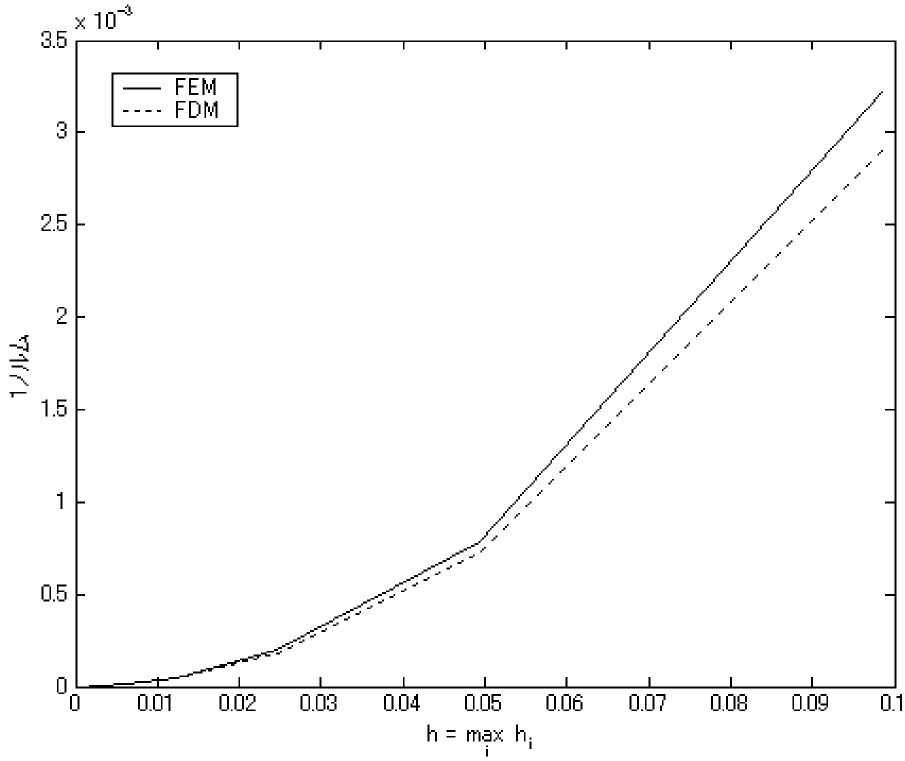

図 5.13: 数値例 3(分割パターン 1) における 1 ノルム評価による精度比較

分割数	$h = \max_i h_i$	有限要素法 (FEM)		差分法 (FDM)	
		$\max_i \lvert u_i - c_i^* \rvert$	$\dfrac{\max_i \lvert u_i - c_i^* \rvert}{h^2}$	$\max_i \lvert u_i - U_i \rvert$	$\dfrac{\max_i \lvert u_i - U_i \rvert}{h^2}$
20	9.9960e-002	1.8215e-002	1.8230e+000	1.9696e-002	1.9712e+000
40	4.9980e-002	4.3410e-003	1.7378e+000	5.1814e-003	2.0742e+000
80	2.4990e-002	1.0726e-003	1.7175e+000	1.3128e-003	2.1022e+000
160	1.2495e-002	2.6737e-004	1.7125e+000	3.2933e-004	2.1094e+000
320	6.2475e-003	6.6793e-005	1.7113e+000	8.2402e-005	2.1112e+000
640	3.1238e-003	1.6695e-005	1.7110e+000	2.0605e-005	2.1116e+000
1280	1.5619e-003	4.1736e-006	1.7109e+000	5.1515e-006	2.1117e+000

表 5.13: 数値例 3(分割パタン 2) における絶対誤差の最大値の数値結果

分割数	$h = \max_i h_i$	有限要素法 (FEM)		差分法 (FDM)	
		$\lVert u - u^* \rVert_1$	$\dfrac{\lVert u - u^* \rVert_1}{h^2}$	$\lVert u - U \rVert_1$	$\dfrac{\lVert u - U \rVert_1}{h^2}$
20	9.9960e-002	7.5355e-003	7.5415e-001	6.5218e-003	6.5270e-001
40	4.9980e-002	1.8953e-003	7.5874e-001	1.7107e-003	6.8485e-001
80	2.4990e-002	4.7405e-004	7.5908e-001	4.3064e-004	6.8958e-001
160	1.2495e-002	1.1855e-004	7.5932e-001	1.0795e-004	6.9142e-001
320	6.2475e-003	2.9639e-005	7.5936e-001	2.6997e-005	6.9167e-001
640	3.1238e-003	7.4097e-006	7.5936e-001	6.7505e-006	6.9181e-001
1280	1.5619e-003	1.8524e-006	7.5936e-001	1.6877e-006	6.9183e-001

表 5.14: 数値例 3(分割パタン 2) における 1 ノルムの数値結果

有限要素法、差分法共に、分割数を倍にすると絶対誤差の最大値も１ノルムも約 $\frac{1}{4}$ になっている。また、この例では、絶対誤差の最大値で評価すると有限要素法の方が精度が良く、１ノルムで評価すると差分法の方が精度が良い。その様子を以下の図 5.14 と図 5.15 に表す。

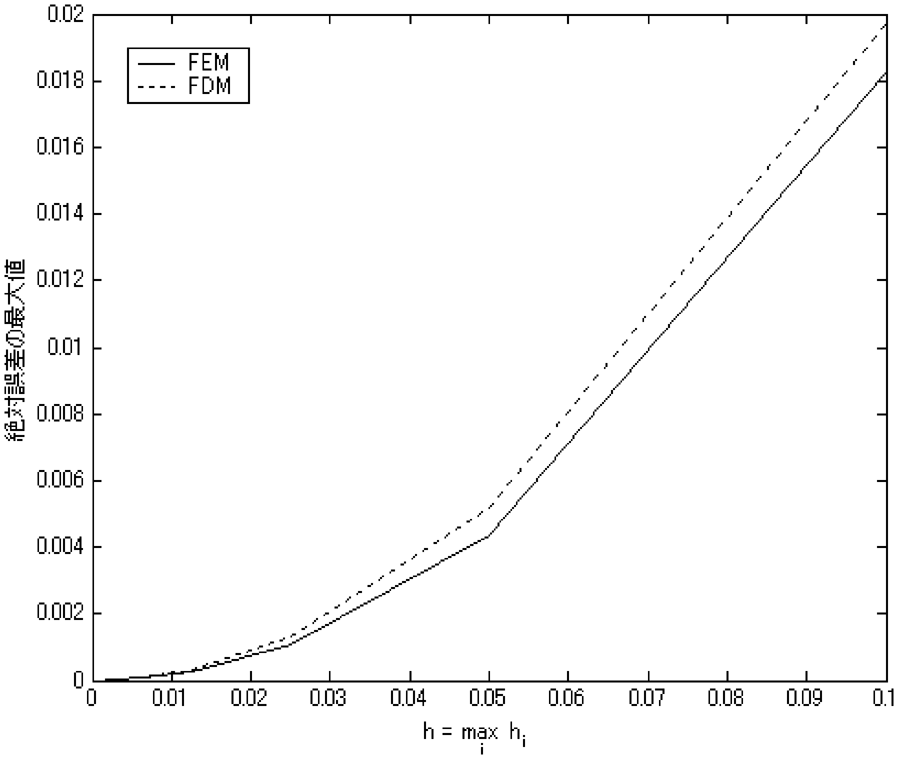

図 5.14: 数値例 3(分割パターン 2) における絶対誤差の最大値評価による精度比較

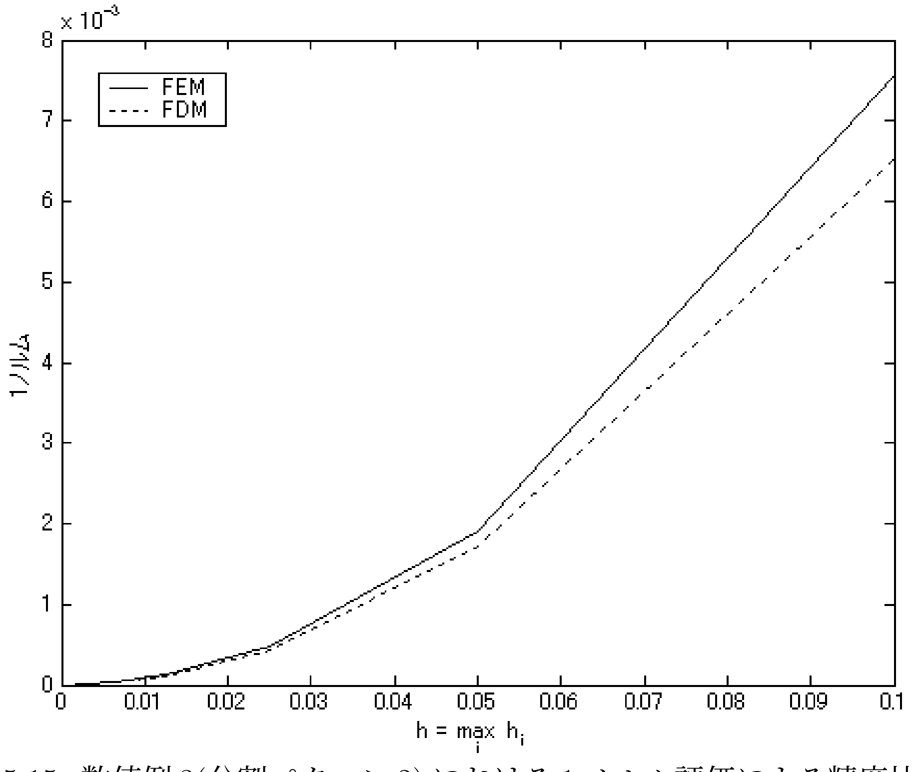

図 5.15: 数値例 3(分割パターン 2) における 1 ノルム評価による精度比較

第 6 章

結論と今後の課題

6.1　結論

今回取り上げた３つの数値例と２つの分割パターンに限れば、Sturm-Liouville 型境界値問題に対して区分的１次多項式を用いる有限要素法を適用した場合

$$\begin{aligned} \frac{\max_i |u_i - c_i^*|}{h^2} &\approx \mathrm{Const} \\ \Leftrightarrow \max_i |u_i - c_i^*| &\approx O(h^2) \end{aligned}$$

となる。すなわち絶対誤差の最大値が分割に対して２次収束しているといえる。

また、有限要素法と差分法の精度を比較した場合には、数値例ごとに、あるいは分割パターンごとにその精度の優劣が入れ替わるっている。つまりこの結果からは優劣は着け難い。

6.2　今後の課題

本論文では、有限要素方程式の係数行列に現れる数値積分を簡便な方法で行ったが、Simpson 則などを用いた場合には精度がどうなるかは今後の課題としたい。また、数値例を用いて実験的に誤差の収束性を調べてみたが、今回取り上げた数値例にのみ当てはまる結果である可能性は否めなく、一般的にこの結果が成り立つどうか、理論的に証明を与えることは今後の課題としておきたい。また、対象とする問題を Sturm-Liouville 型境界値問題に限定したが、より実際的な２次元以上の境界値問題に対してはどうであるかも今後の課題としたい。

謝辞

本論文の作成にあたり、テーマ決定から研究内容の指針まで数々の御助言と御指導を下さりました山本哲朗教授に深く感謝致します。また、様々点で大変お世話になりました松永奈美博士にも深く感謝致します。そして、研究室のパートナーの河合将史氏にも、共に研究を続けていけたこと、よく語り合えたことを深く感謝します。最後に本論文に御指導、ご協力を頂いた皆様に心から深く感謝致します。どうもありがとうございました。

参考文献

[1] 山本哲朗：数値解析入門 [増訂版], サイエンス社 2003

[2] 菊池文雄：有限要素法の数理, 培風館 1994

[3] 菊池文雄：有限要素法概説, サイエンス社 1980

[4] 草野尚：境界値問題入門, 朝倉書店 1971

[5] 松浦 武信・小泉 義晴・吉田 正広：物理・工学のためのグリーン関数入門, 東海大学出版 2000

[6] 大石進一：MATLAB による数値計算, 培風館 2001