非線型偏微分方程式のNeumann境界値問題の解の精度保証

田中一成

1 問題提起

Ωを$\mathbb{R}^2$上の有界な連結開集合とし、Γをその境界とする。このとき、以下の非線形Neumann境界値問題を考える。

$$-\Delta u = f(u), \ (x \in \Omega) \tag{1}$$
$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0, \ (x \in \Gamma) \tag{2}$$

この問題の解に対する精度保証付き数値計算法を述べる。もし、上のNeumann問題の解が存在すれば、Gaussの定理より、その解$u^* \in H^2(\Omega)$に対して、

$$\int_\Omega f(u^*)\,dx = -\int_\Omega \Delta u^* dx = -\int_\Omega \nabla \cdot (\nabla u^*)\,dx = -\int_\Gamma \frac{\partial u^*}{\partial n} d\gamma = 0$$

が成り立つことに注意しておく。

2 準備

2.1 Newton-Kantorovichの定理

X, YをBanach空間とし$\mathcal{F}: X \to Y$がある$\hat{u} \in X$において、Freécet微分可能であり、以下の3つの条件を満たすとする。

(i) ある$\alpha > 0$に対して、$\left\|F'(\hat{u})^{-1} F\hat{u}\right\|_X \leq \alpha$

(ii) ある$\beta > 0$が存在し、任意の$v, w \in B(\hat{u}, 2\alpha) = \{x \in X \mid \|\hat{u} - x\|_X \leq 2\alpha\}$
$\left\|\mathcal{F}'(\hat{u})^{-1}(\mathcal{F}'(v) - \mathcal{F}'(w))\right\|_{L(X,Y)} \leq \beta \|v - w\|_X$

(iii) $\alpha\beta \leq \dfrac{1}{2}$

このとき、$\mathcal{F}u = 0$を満たす$u \in B\left(\hat{u}, \frac{1-\sqrt{1-2\alpha\beta}}{\beta}\right)$が一意に存在する。

2.2 中尾の定理

2.2.1 記号の導入

$\hat{X}$ を Banach 空間、X, Y を Hilbert 空間とし、

$$\hat{X} \hookrightarrow X \hookrightarrow Y$$

が成り立っているとする。ただし、埋め込み $\hat{X} \hookrightarrow X$ はコンパクトであるとする。また、埋め込み $X \hookrightarrow Y$ に対して

$$\|u\|_Y \leq C_p \|u\|_X \,, \quad \forall u \in X$$

が成り立っているとする。$\mathcal{A}$ を $\hat{X}$ から Y への線形作用素、$\mathcal{N}$ を X から Y への作用素として、$\mathcal{N}$ の $\hat{w} \in X$ における Frechet 微分を、$\mathcal{N}'[\hat{w}]$ とかき、

$$\mathcal{L} := \mathcal{A} - \mathcal{N}'[\hat{w}]$$

と定義する。また、X の有限次元部分空間 X_h の基底を $\{\phi_i\}_{1 \leq i \leq N_d}$ とし、$N_d \times N_d$ 行列 D, L を、

$$D_{ij} := (\phi_j, \phi_i)_X \,, \quad L_{ij} := (\phi_j, \phi_i)_Y$$

と定義する。また、線形作用素 q（例えば $\mathcal{N}'[\hat{w}]$）: $X \to Y$ を用いて、行列 G を、

$$G_{ij} := (\phi_j, \phi_i)_X - (q\phi_j, \phi_i)_Y$$

と定義する。このとき、D, L は Cholesky 分解可能であるから、その分解成分である下三角行列 $D^{\frac{1}{2}}, L^{\frac{1}{2}}$ を、

$$D^{\frac{1}{2}} D^{\frac{H}{2}} = D, \quad L^{\frac{1}{2}} L^{\frac{H}{2}} = L$$

を満たすものとして定義する。

2.2.2 仮定

P_h を X から X_h への射影とする。$C(h) \to 0\,(h \to 0)$ を満たす $C(h) > 0$ が存在して、

$$\|(I - P_h)v\|_X \leq C(h) \|\mathcal{A}v\|_Y \,, \quad \forall v \in \hat{X}$$

を満たすとする。

2.2.3 補題

$\nu_1, \nu_2, \nu_3 \geq 0$ が存在して、

$$\left\| P_h \mathcal{A}^{-1} q w_* \right\|_X \leq \nu_1, \quad \forall w_* \in X_h^{\perp}$$

$$\|qw\|_Y \leq \nu_2 \|P_h w\|_X + \nu_3 \|(I - P_h) w\|_X \quad \forall w \in X$$

が成り立つとする。このとき、$\rho := \left\| D^{\frac{H}{2}} G^{-1} D^{\frac{1}{2}} \right\|_2$ として、

$$\kappa := C(h) (\rho \nu_1 \nu_2 + \nu_3) < 1$$

が成り立てば、$\tilde{\mathcal{L}} := I - \mathcal{A}^{-1} q$ は可逆である。また、

$$\tilde{\mathcal{L}} \text{ が可逆} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L} \text{ が可逆}$$

が成り立つので、このとき $\mathcal{L}$ も可逆となる。

2.2.4 定理

$\mathcal{L}$ が可逆であるとする。は $\hat{\rho} := \left\| D^{\frac{H}{2}} G^{-1} L^{\frac{1}{2}} \right\|_2$ として、

$$\hat{\kappa} := C(h) \nu_3 (1 + \hat{\rho} \nu_2) < 1$$

が成立すれば、

$$\left\| \mathcal{L}^{-1} \phi \right\|_X \leq M \|\phi\|_Y, \quad \forall \phi \in Y$$

を満たす $M > 0$ は、

$$M = \frac{\sqrt{\hat{\rho}^2 + C(h)^2 (1 + \nu_2 \hat{\rho})^2}}{1 - \hat{\kappa}}$$

で定まる。

3 提案手法

3.1 弱形式化

(1) 式の両辺に $v \in H^1(\Omega)$ を掛けて Ω 上で積分すると、

$$-\int_\Omega (\Delta u) v dx = \int_\Omega f(u) v dx, \ \forall v \in H^1$$

が得られるが、(2) 式よりこれは、

$$-\int_\Omega (\Delta u) v dx + \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial n} v d\gamma = \int_\Omega f(u) v dx, \ \forall v \in H^1 \qquad (3)$$

と同値である。また、Green の定理より、

$$
\begin{aligned}
& \int_\Omega (\Delta u)\, v dx = -\int_\Omega \nabla u \nabla v dx + \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial n} v d\gamma \\
\Leftrightarrow\quad & -\int_\Omega (\Delta u)\, v dx + \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial n} v d\gamma = \int_\Omega \nabla u \nabla v dx
\end{aligned}
\tag{4}
$$

が成り立つので、(3)(4) より、

$$
\begin{aligned}
& \int_\Omega \nabla u \nabla v dx = \int_\Omega f(u)\, v dx,\ \forall v \in H^1 \\
\Leftrightarrow\quad & (\nabla u, \nabla v)_{L^2(\Omega)} = (f(u), v)_{L^2(\Omega)},\ \forall v \in H^1
\end{aligned}
\tag{5}
$$

が得られ、これは Neumann 問題 (1)(2) の弱形式である。ここで、双一次形式 $a: H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ を、

$$a(\xi, \eta) := (\nabla \xi, \nabla \eta)_{L^2(\Omega)}$$

と定義し、これを用いて $\mathcal{A}: H^1(\Omega) \to H^1(\Omega)^*$ を、

$$< \mathcal{A}\xi, \eta > := a(\xi, \eta), \forall \eta \in H^1$$

と定義する。次に $\mathcal{N}: H^1(\Omega) \to H^1(\Omega)^*$ を、

$$< \mathcal{N}\xi, \eta > := (f(\xi), \eta)_{L^2(\Omega)}, \forall \eta \in H^1$$

と定義する。これらの作用素を用いて (5) 式は、

$$< \mathcal{A}u, v > = < \mathcal{N}u, v >,\ \forall v \in H^1 \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{A}u = \mathcal{N}u \tag{6}$$

と書ける。よって $\mathcal{F}: H^1(\Omega) \to H^1(\Omega)^*$ を、

$$\mathcal{F}\xi := \mathcal{A}\xi - \mathcal{N}\xi$$

と定義すれば、(6) 式は更に、

$$\mathcal{F}u = 0 \tag{7}$$

という作用素方程式に帰着される。この (7) 式に対して、Newton-Kantorovich の定理を適用する。

3.2 定数評価

3.2.1 逆作用素の norm 評価

以下、$H^1(\Omega), L^2(\Omega)$ を単に H^1, L^2 とかく。$\hat{u} \in H^1, q := f'[\hat{u}]$ として、中尾の定理を用いる。$w \in H^1$ を任意にとると、

$$
\begin{aligned}
\|f'[\hat{u}]\, w\|_{L^2} &= \|f'[\hat{u}](P_h w) + f'[\hat{u}](w - P_h w)\|_{L^2} \\
&\le \|f'[\hat{u}](P_h w)\|_{L^2} + \|f'[\hat{u}](w - P_h w)\|_{L^2} \\
&\le \|f'[\hat{u}]\|_{L(H^1, L^2)} \|P_h w\|_{H^1} + \|f'[\hat{u}]\|_{L(H^1, L^2)} \|w - P_h w\|_{H^1}
\end{aligned}
\tag{8}
$$

であるから、

$$\nu_2 = \nu_3 = \left\| f'\left[\hat{u}\right] \right\|_{L(H^1, L^2)}$$

となる。

3.2.2 残差 norm 評価

$$\begin{aligned}
\left\| \mathcal{F}\hat{u} \right\|_{H^{1*}} &= \sup_{v \in H^1, v \neq 0} \frac{\left| \left(\nabla \hat{u}, \nabla v \right)_{L^2} - \left(f\left(\hat{u}\right), v \right)_{L^2} \right|}{\left\| v \right\|_{H^1}} \\
&\leq \sup_{v \in H^1, v \neq 0} \frac{\left\| \nabla \hat{u} \right\|_{L^2} \left\| \nabla v \right\|_{L^2}}{\left\| v \right\|_{H^1}} + \sup_{v \in H^1, v \neq 0} \frac{\left\| f\left(\hat{u}\right) \right\|_{L^2} \left\| v \right\|_{L^2}}{\left\| v \right\|_{H^1}} \qquad (9)
\end{aligned}$$

ここで、1 以下の正定数 $C_1, C_{e,2}$ が存在して、

$$\left\| \nabla v \right\|_{L^2} \leq C_1 \left\| v \right\|_{H^1}, \quad \left\| v \right\|_{L^2} \leq C_{e,2} \left\| v \right\|_{H^1}$$

が成り立つことを用いれば。

$$(9) \quad \Leftrightarrow \quad \left\| \mathcal{F}\hat{u} \right\|_{H^{1*}} \leq C_1 \left\| \nabla \hat{u} \right\|_{L^2} + C_{e,2} \left\| f\left(\hat{u}\right) \right\|_{L^2}$$

という残差評価式が得られる。