卒業論文概要書

CD

2009 年　2 月提出　　学籍番号1g05r190-5

学科名	コンピュータ・ネットワーク工学科	氏 名	吉越　一樹	指 導 教 員	大石　進一
研 究 題 目	誤差を含めた三点の入力に対する点と直線の位置関係				

1.序論

本研究では計算幾何学の基礎的な判定問題である、2 次元平面における点と直線の位置関係の問題を取り扱う。ここで、点と直線の位置関係とは、２点から構成される向きのある直線と、1 点を与え、点が直線の「左」・「右」・「直線上」のどの位置にあるかを判定することである。

通常の点と直線の位置関係は、3 次の行列式の符号により求められる問題(ex.符号付面積)と等価である。この問題は精度保証付き数値計算によって、問題の難しさに依存した計算時間をかけて、正しく解かれることが知られている。

本研究では、入力された 3 点が、誤差を含めた区間である場合の、「点と直線の位置関係」の問題を解くことを目標とする。入力は、浮動小数点数が有限な数であるために、実数を浮動小数点数に変換する際等、はじめから誤差を持っていると解釈できる。他にも、計測値であった場合、近似計算の結果だった場合、座標を読み取った場合など、はじめから誤差を持っていることは稀ではない。

よって、区間を入力とする問題を解くことは、より現実的な問題であると考える。この問題に対し、点の位置が有向な直線に対して、常に「左」・常に「右」・場合によっては両方が在りうる「判定不能」と答える厳密なアルゴリズムを開発する。

2.符号付き面積での判定

3 点の位置関係は 3 次の行列式の符号を求める問題と等価であるから、符号付き面積で判定する。この符号付き面積の計算が簡単で、符号が保証されたものであるための十分条件を考える。

3 点の入力成分を(x_1,y_1), (x_2,y_2), (x_3,y_3)とすると符号付き面積は$(x_2-x_1)(y_3-y_1)-(y_2-y_1)(x_3-x_1)$となり、これは行列式で次のように表せる。

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

入力成分を(x_1,y_1), (x_2,y_2), (x_3,y_3)に、

$$-\epsilon \leqq e_x, e_y, f_x, f_y, g_x, g_y \leqq +\epsilon (\epsilon > 0)$$

とした誤差を含めた行列式

$$\begin{vmatrix} x_1 + e_x & y_1 + e_y & 1 \\ x_2 + f_x & y_2 + f_y & 1 \\ x_3 + g_x & y_3 + g_y & 1 \end{vmatrix}$$

についてこの区間に対する厳密な計算を行なう。

3.端点での精度保証

直線を構成する 2 点の入力に対し、誤差を含め、その区間内を動ける点同士を結び、その直線と第 3 点を判別する。

3 点の入力成分(x_1,y_1)に対し、誤差$\varepsilon>0$を持たせた$(x_1+\varepsilon, y_1+\varepsilon)$, $(x_1-\varepsilon, y_1+\varepsilon)$, $(x_1+\varepsilon, y_1-\varepsilon)$, $(x_1-\varepsilon, y_1-\varepsilon)$という長方形領域を定義する。

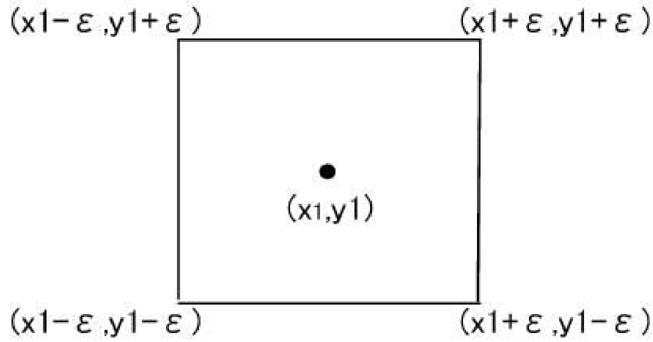

図 1:正方形領域の端点

この際の、誤差を含めた長方形領域の端点を結ぶことで入力 3 点の位置関係を解決できることを端点での精度保証とする。

直線を構成する 2 点の入力の、誤差を含めた長方形領域からの端点の選び方は（4×4=16 通り）ある。残りの 1 点(端点の 4 通り)の「判定不能」の範囲を特定しようとするには、最大で 4×4×4 の 64 通りを調べる。なるべく計算を少なくするために、これらの過程で場合わけをする。

4.本論文の結果と考察

今回の実験を通し、入力に誤差を持っている 3 点の位置関係で次のことがわかった。

・符号付き面積による判定では、この判定問題をどれだけ楽に精度保証をかけられるか、というように取り組んだ。しかし、事前誤差評価で精度保証するのであれば、符号付面積の式が無限に存在し、どのように式を変形することがよいとは一概には言えないということがわかった。

・入力に誤差を持っている 3 点の位置関係は、直線になる 2 点の誤差でできる長方形領域の端点を結ぶ直線と、判定される 1 点との判定を用いればどんな場合も厳密に評価できる。

当初 64 通りの計算をして判定する予定だったが、直線になる 2 点の長方形領域内のありとあらゆる直線の中での上限と下限をもとめ、それに対して 3 点目の上端と下端を判定することで式を簡略化することができた。

これらの上限下限を表す図形も x 軸 y 軸対称を考えると、全平面上の 3 点の位置関係は次の 2 種類に分類できることがわかった。

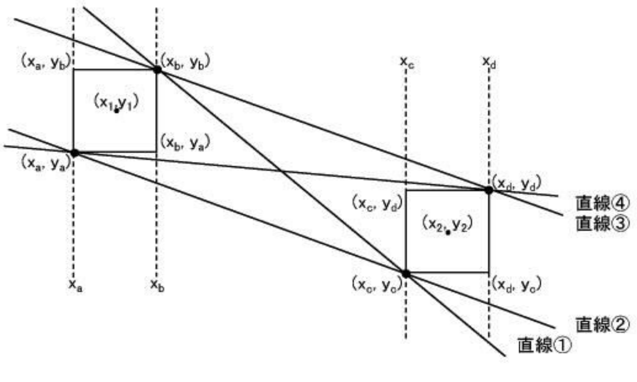

図 2:直線を構成する入力 2 点の位置関係 I

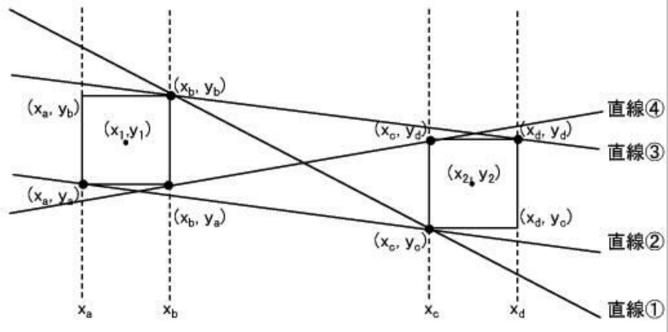

図 3:直線を構成する入力 2 点の位置関係Ⅱ

このように入力が区間を含めた判定問題は、入力が点である判定を数回行なうことで、どんな場合も正しく解決できるという結論に至った。

もちろん入力が端点のような点であるので、現在の精度保証付きの数値計算で正確に解けることになる。

5.参考文献

[1] 大石進一:精度保証付き数値計算,コロナ社,2000.
[2] 浅間哲夫:計算幾何-理論の基礎から実装まで-,共立出版社,2007.
[3] 永井孝幸、都倉信樹、安留誠吾:入力が誤差を含む場合の厳密な交差判定,電子情報通信学会技術研究報告　vol.96,No.196 pp11-20　,1996