卒 業 論 文 概 要 書

CD

2009 年　2 月提出　　学籍番号　1G05R158-6

学科名	コンピュータ・ネットワーク工学科	氏 名	細江健太郎	指　導 教　員	大石進一
研　究 題　目	誤差を含めた 3 点の入力に対する点と直線の位置関係				

1．序論

本研究では計算幾何学の基礎的判定問題である，2 次元平面における点と直線の位置関係の問題を取り扱う．ここで，点と直線の位置関係とは，2 点から構成される直線と，1 点を与え，点が直線の「左」・「右」・「直線上」のどの位置にあるかを判定する問題である．

通常の点と直線の位置関係は，3 次の行列式の符号により求められる問題と等価である．
精度保証付き数値計算によって問題の難しさに依存した計算時間をかけて正しく解かれることが知られている．

本研究では，点の入力が区間である．すなわち，点が誤差を含めた長方形領域の区間内を自由に動けて，区間のどこに点が位置しているかわからない状態となる．この場合の点と向きのある直線の位置関係の問題を解くことを目標とする．浮動小数点数は有限な数であるために，実数を浮動小数点数に変換するとはじめから誤差を持っていると解釈できる．また，計測値などのデータの場合もそもそも計測誤差を含んでいて，座標を計測しても誤差が存在する．

よって，区間を入力とする問題を解くことはより現実的な問題であると考える．この問題に対し，点が直線に対して「左」・「右」・「判定不能」と答える厳密なアルゴリズムを開発する

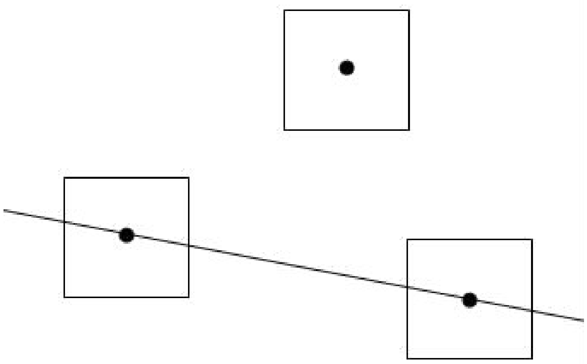

図 1．3 点の位置関係

2．符号付面積による判定

本研究では，図 2 のように入力の点に対して，ε＞0の誤差を含めた長方形領域をとる

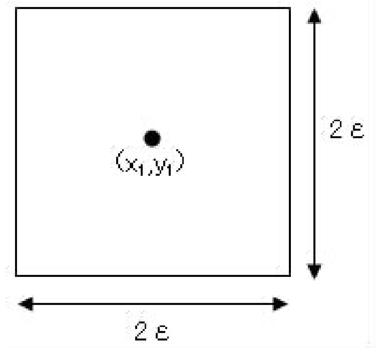

図 2．誤差の定義

3 点の位置関係を符号付面積で判定する．この符号付面積の計算が簡単で，符号が保証されたものであるための十分条件を考える．

入力2点を$(x_1,y_1),(x_2,y_2)$,3点目を(x_3,y_3) とすると，符号付面積の行列式は

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

と表せる．
3 点に誤差$-\varepsilon \le e_x, e_y, f_x, f_y, g_x, g_y \le +\varepsilon (\varepsilon > 0)$の与えた場合の行列式を作ると

$$\begin{vmatrix} x_1 + e_x & y_1 + e_y & 1 \\ x_2 + f_x & y_2 + f_y & 1 \\ x_3 + g_x & y_3 + g_y & 1 \end{vmatrix}$$

と表せる．
これを行列式の線形性を利用し，展開していき，因数分解等で，解いていく．それに事前誤差評価で制度保証をかける．

3．端点による制度保証

直線を構成する 2 点の誤差を含めた長方形領域の区間を自由に動ける点を結び，その 2 点からなる直線と 3 点目を判定する．この際の誤差を含めた長方形領域の端点を結ぶことで，3 点の入力の位置関係を解決できることを端点での制度保証とする．直線を構成する誤差を含めた 2 点の長方形領域の端点で，4x4 の 16 通りある．そして，判定用の 1 点の端点を合わせて，4x4x4 の計 64 通りを調べていき，その過程で場合わけを行う．

4. 結果と考察

まず，符号付面積による手法は問題を簡単にして，制度保証をかけるやり方であり，端点を利用した手法は厳密に答えを出すというやり方に分別できる．

符号付面積による判定においては，事前誤差評価で制度保証をかけるとしたら，式をどんな形に変形すればよいかを言及することができないことがわかった．展開の仕方，因数分解の仕方によって，式の形が多様になってくるからである．よって，符号付面積による判定では，簡単に判別することはできない．

次に，端点による判定で 64 通りを調べる際，入力用の 2 点の誤差を含めた長方形領域の区間内をそれぞれ自由に動ける点で結んだ直線を求める．そして，その 2 つ長方形領域を結ぶすべての直線のうちの上限と下限に対して，判定用の 3 点目の長方形領域の上端と下端を判定するという手法で 64 通りすべてを調べる必要はなくなった．

2 点の入力の長方形領域の位置関係は大きく 2 通り存在する．

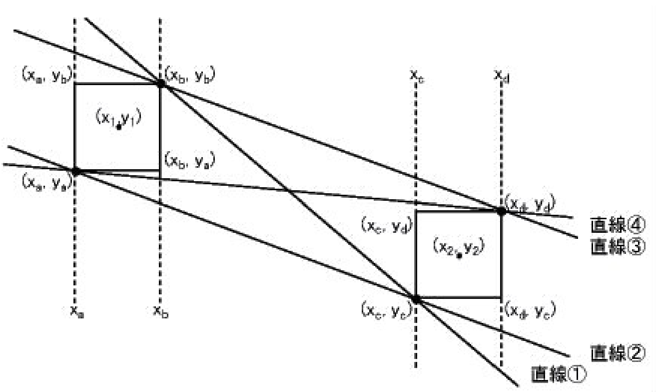

図 4.　長方形領域の y 成分が重なる場合

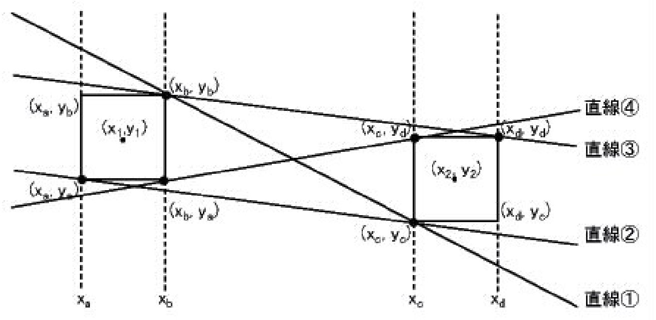

図 4.　長方形領域の y 成分が重なる場合

1 つ目は図 3 のように，2 つの長方形領域の y 成分に重なりが無い場合である．

2 つ目は図 4 のように，2 つの長方形領域の y 成分に重なりが有る場合である．

これら 2 通りのみで，他の位置関係のパターンは対称により同じように表せる．

ここで，図 3 の場合の 2 つの長方形領域を結ぶ直線のうちの最外郭の 4 本の直線は

① $(x_b, y_b), (x_c, y_c)$ を結んだ $(y-y_c)(x_c-x_b)=(y_c-y_b)(x-x_c)$
② $(x_a, y_a), (x_c, y_c)$ を結んだ $(y-y_c)(x_c-x_a)=(y_c-y_a)(x-x_c)$
③ $(x_b, y_b), (x_d, y_d)$ を結んだ $(y-y_d)(x_d-x_b)=(y_d-y_b)(x-x_d)$
④ $(x_a, y_a), (x_d, y_d)$ を結んだ $(y-y_d)(x_d-x_a)=(y_d-y_a)(x-x_d)$

と表せる．（図 4 の場合も同様に式は作る）

4 本の直線のうちの 2 本以上にはさまれる領域に 3 点目が有る場合は，「判定不能」となる．上記の最外郭としている 4 本の直線は，端点を結んだときの傾きを考慮し選んでいる．これらの直線は「判定不能」となる領域の上限，下限を表していて，x 成分に範囲よって，どの直線が上限，下限になるか異なってくる．

これら 4 本の最外郭の直線は図から傾きを見て選んでいるため，本当にこれらが上限と下限になりうるかどうかを数学的に証明する．

ここで，2 点の入力の長方形領域を自由に動ける点を結ぶ直線の一般式は，

$$(y-Y_2)(X_2-X_1)=(Y_2-Y_1)(x-X_2)$$

とし，その領域は

$$x_1-\epsilon \le X_1 \le x_1+\epsilon$$
$$y_1-\epsilon \le Y_1 \le y_1+\epsilon$$
$$x_2-\epsilon \le X_2 \le x_2+\epsilon$$
$$y_2-\epsilon \le Y_2 \le y_2+\epsilon$$

とする．

この式とそれぞれのパターンの最外郭の 4 本を比較することで，x 成分によって場合わけされた範囲において，どの直線が上限と下限になるかを証明する．

上限と下限が証明されれば，3 点目の誤差を含めた長方形領域の上端と下端を判定する手法が利用できる．したがって，端点における制度保証によって，3 点の位置関係は厳密に 2 点の入力に対して，3 点目が「左」,「右」,「判定不能」と判定が可能になる．

これは，入力が区間であるような問題は，入力が点である問題を数回繰り返し行うことで，正しく解決できることがわかる．

5. 参考文献

[1] 大石進一：制度保証付き数値計算，コロナ社，2000

[2] 浅間哲夫:計算幾何 - 理論の基礎から実装まで -，共立出版社，2007

[3] 永井孝幸，戸倉信樹，安留誠吾：入力が誤差を含む場合の厳密な交差判定，電子情報通信学会技術研究報告 vol.96，No.196 pp.11-20，1996