卒 業 論 文 概 要 書

CD

平成 21 年 2 月提出　　学籍番号 1G05R125-1

学科名	コンピュータ・ネットワーク工学科	氏　名	築地　真也	指　導 教　員	大石　進一
研　究 題　目	有限差分法によるブラックショールズ方程式の解析				

1　目的

ブラックショールズ方程式 (Black-Scholes:以下、BS 方程式と略す) は、デリバティブの価格付けに用いられる偏微分方程式の一つである。1973 年にフィッシャー・ブラック (Fischer Black) とマイロン・ショールズ (Myron Scholes) が共同で発表した理論であり、ヨーロピアンオプションコール (プット) オプションのプレミアムを計算するものである。彼らが発表して以降この理論は広く知られ、1980 年代にはオプション価格を決定する際にこのモデルが用いられた。さらに、実際の金融機関でも用いられる等、現代金融工学の研究および実際の金融・証券の分野における基礎的かつ重要なものとなり、今日では金融商品開発の分野にも応用されている。

本研究では、この BS 方程式を 3 種類の有限差分法（陽解法、陰解法、クランク・ニコルソン法）により解析し、現実問題と照らし合わせることを目的とする。

2　BS 方程式とは

ヨーロピアンコールオプションとは、ある金融商品を、未来のある時点 T(満期日という) において、予め取り決めておいた契約価格 K(行使価格という) で購入する権利を指す。つまりその金融商品は満期日 T における価格 S_T で売ることが出来るということである。満期日 T における株式の価格 S_T が行使価格 K を超えていれば、この権利を行使して $S_T - K$ の利益を受け取ることが出来る。しかし、S_T が K を下回っていれば、この権利を行使しないので、受け取るものはない。よって、このコールオプションの満期日 T における価値は

$$\begin{cases} S_T - K & (S_T \geq K) \\ 0 & (S_T < K) \end{cases}$$

となる。満期日では既知であるこのコールオプションの現在価値を算出するのが BS 方程式である。この BS 方程式は以下の方程式で与えられる：

$$\frac{\partial C}{\partial t}(S,t) + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2}(S,t) + rS\frac{\partial C}{\partial S}(S,t) - rC(S,t) = 0.$$

ここで、S は株価、t は時間変数である。また、C はオプション価格であり、株価と時間に依存する未知関数である。さらに r は金利、σ はボラティリティ（変動性）を表し、ともに定数である。この方程式は適当な変数変換を行うことで、熱方程式に帰着できることがよく知られている。そこで、熱方程式の解表示を用いることで、この BS 方程式の解表示が次のように与えられることが分かる：

$$C(S,t) = SN(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2).$$

ただし

$$\begin{aligned} N(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-y^2/2}dy, \\ d_1 &= \frac{\log(S/K) + (r+\sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \\ d_2 &= \frac{\log(S/K) + (r-\sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \end{aligned}$$

とした。

3　3 種類の差分解析

解析的には上記のように解を表すことが出来るが、この解を解析することは困難なので、本研究では 3 種類の差分法を用いた数値解析を行う。

差分法とは離散化手法の 1 つであり、一次導関数を代数式（差分式）によって表すことにより、離散化を行う方法を指す。プログラミング化が容易であること、高次の差分スキームが使用できること、ベクトル化が容易であるという利点がある。

差分法によりオプション価格を求めるためにまず、株価と時間平面による 2 次元空間上の長方形を考える。株

価は最低値である Smin と、最高値である Smax の間を、時間は時点 0 とオプションの満期に対応する時点の間の点を取りうると考える。これが、株価の取りうる境界条件である。

ブラックショールズモデルが想定する連続モデルでは、株価はこの区間で区切られた平面上のあらゆる値を取りうると想定するが、数値計算を行うために限られた点上の値を取ると仮定する。具体的には、この区間の平面を格子上に分割し、株価はこの格子点上の値のみを取ることができるとする。連続的な偏微分方程式を離散近似した差分方程式を解いて派生証券の価格を求める。さらに 3 つの境界条件を考える。満期時の株価、株価の最低値、株価の最高値に対応するこの派生証券からのペイオフを与えられた条件として満期日から遡って順次オプション価値を計算する。こうすることにより、最終的には時点 0 における全ての株価に対するオプション価値を計算することが可能である。

本研究では、陽解法、陰解法、クランク・ニコルソン法の三解法を用いて近似解を導く。陽解法は前進差分、陰解法は後進差分、クランク・ニコルソン法は中心差分を用いる。

3.1 陽解法を用いた解析

陽解法を用いると、BS 方程式は

$$C_{i,j} = \alpha_j C_{i+1,j+1} + \beta_j C_{i+1,j} + \gamma_j C_{i+1,j-1}$$

と表すことが出来る。ここで、

$$\alpha_j = \frac{dt\left(rj + \sigma^2 j^2\right)}{2(1+rdt)}, \qquad \beta_j = \frac{\left(1 - \sigma^2 j^2 dt\right)}{1+rdt},$$
$$\gamma_j = \frac{dt\left(-rj + \sigma^2 j^2\right)}{2(1+rdt)}$$

とおいた。また、$C_{i,j}$ は時刻 i における株価 $S = jdS$ でのオプション価格を表している。式を見ると分かる通り、先行する 3 つのオプション価格によって現在のオプション価格が表されることになる。なぜ先行するオプション価格から後退して現在を表すかといえば、将来の権利行使時点の価格を決めることができるからである (オプションの満期条件より)。陽解法を用いる際には、安定条件 $dt < dS^2/2$ や収束条件 $\alpha_j, \beta_j, \gamma_j > 0$ であることが必要であることに注意する。

3.2 陰解法を用いた解析

陰解法の場合、BS 方程式は次のようになる：

$$C_{i+1,j} = \alpha_j C_{i,j+1} + \beta_j C_{i,j} + \gamma_j C_{i,j-1}$$

ここで、

$$\alpha_j = \frac{dt}{2}\left(-rj - \sigma^2 j^2\right), \qquad \beta_j = \sigma^2 j^2 dt + 1 + rdt,$$
$$\gamma_j = \frac{dt}{2}\left(rj - \sigma^2 j^2\right)$$

とした。α_j、β_j、γ_j は定数であって、それ以外に既知な値は左辺の $C_{i+1,j}$ だけである。したがってこの差分方程式は、$C_{i,j+1}$、$C_{i,j}$、$C_{i,j-1}$ を 3 つの独立変数とする方程式と考えられる。すると上下にずらして方程式を利用すれば、連立方程式となって解くことができる。ただし計算するに当たり、係数の逆行列を利用して行うことになるので、計算量はかなり大きくなる。

3.3 クランク・ニコルソン法を用いた解析

クランク・ニコルソン法の場合、次のように BS 方程式を表すことが出来る:

$$\begin{aligned} & \alpha_j C_{i,j+1} + \beta_j C_{i,j} + \gamma_j C_{i,j-1} \\ = \; & -\alpha_j C_{i+1,j+1} + \delta_j C_{i+1,j} - \gamma_j C_{i+1,j-1}. \end{aligned}$$

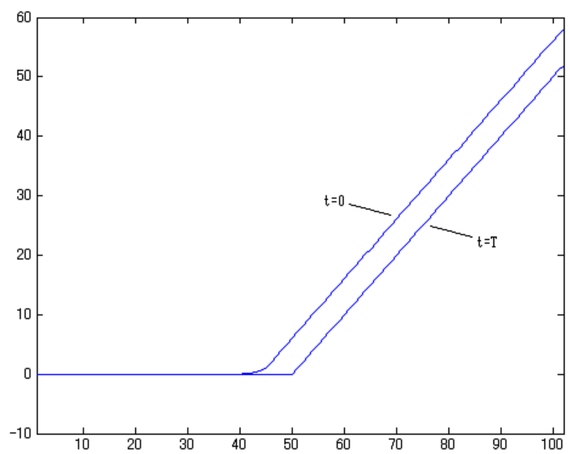
ただし、

$$\alpha_j = \frac{dt}{4}\left(-rj - \sigma^2 j^2\right), \quad \beta_j = \frac{1}{2}\sigma^2 j^2 dt + 1 + rdt,$$
$$\gamma_j = \frac{dt}{4}\left(rj - \sigma^2 j^2\right), \qquad \delta_j = 1 - \frac{1}{2}\sigma^2 j^2 dt.$$

この差分方程式は、陰解法と同様に $C_{i,j+1}$、$C_{i,j}$、$C_{i,j-1}$ を 3 つの独立変数とする方程式と考えられる。よって、上下にずらして方程式を連立すれば、連立方程式となって解くことができる。

4 数値実験結果

陽解法を用いて得られた BS 方程式の近似解は以下のようになった：



ここで、横軸を株価 S、縦軸をオプション価格 $C(S,t)$ とした。右側の直線が満期日 $t = T$ のコールオプションの価値であり、同コールオプションの現在 $t = 0$ の価値を表しているのが左側の直線である。