

修士論文概要書

CD

平成 20 年 2 月提出

学籍番号 3606U113-3

専攻名 (専門分野)	情報・ネットワーク	氏名	山中 脩也	指導 教員	大石 進一	印
研究指導名	情報数理工学					
研究 題目	誤差項に多重階微分を含む数値積分則の複素解析を用いた精度保証法					

1 はじめに

次の一変数関数の積分を考える．

$$I_1 = \int_a^b f(x) dx$$
$$I_2 = \int_a^b \frac{f(x)}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} dx$$

なお、 $f(x)$ は次の仮定を満たすものとする．

- $C^\infty \left(\left[a - \frac{3}{10}(b-a), b + \frac{3}{10}(b-a) \right] \right)$
- 次の複素数領域において特異点を持たない．

$$\begin{cases} a - \frac{3}{10}(b-a) \leq \operatorname{Re}(z) \leq b + \frac{3}{10}(b-a) \\ -\frac{2}{5}(b-a) \leq \operatorname{Im}(z) \leq \frac{2}{5}(b-a) \end{cases}$$

本論文では I_1 型、 I_2 型の積分を精度保証付きで計算するアルゴリズムを提案する．

I_1 型、 I_2 型の積分を精度保証付きで計算するアルゴリズムは既存であるが、一般に利用されている自動微分を用いる方法は、計算の大部分を区間演算を用いて計算しなければならないため、計算コストが多いという短所があった．

本論文で提案する手法は、複素解析を用いて計算を行なう．提案手法において区間演算を用いて計算するのは一部であるため、計算コストは自動微分に比べて少なくなり、実行時間が短縮されることが期待される．

2 高階微分値の見積り

複素平面上に単連結領域 D を取る． $f(z)$ は D で解析的であるとし、 z_0 は D 内に存在するとする．また C を D 内に存在し、 z_0 のまわりを正の向きにまわる単純閉曲線とする．この時、

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz$$

と書ける．これをグルサの定理という．

次に、実軸上の線分 $a \leq x \leq b$ が D の内部に含まれているものと仮定する． C として D に存在し、上記線分を内部に含むように選ぶ．すると、

$$\left| f^{(n)}(x) \right| \leq \frac{n!}{2\pi} \int_C \frac{|f(z)| |dz|}{|z-x|^{n+1}} \leq \frac{n!LM}{2\pi\delta^{n+1}}$$

となる． L は C の長さ、 M は $\max_{z \in C} |f(z)|$ 、 δ は C から線分 $a \leq x \leq b$ 上の点へ至る距離の最小値である．高階微分値を見積るのに都合の良い領域 D の形は、

$$D: |z-t| \leq \delta \quad \text{for } \forall t \text{ s.t. } a \leq t \leq b$$

である．この時、 $[a, b]$ 内に固定した x に対しては、円板 $|z-x| \leq \delta$ は D 内に含まれるので、

$$\max_{x \in [a, b]} \left| f^{(n)}(x) \right| \leq \frac{n!2\pi\delta M_\delta}{2\pi\delta^{n+1}} = \frac{n!M_\delta}{\delta^n} \quad (1)$$

となる．ここで、 M_δ は $\max_{z \in D} |f(z)|$ である．

3 数値積分則の誤差項の見積り

3.1 Gauss-Legendre 則

I_1 型の積分に対する Gauss-Legendre 則の誤差項 $E_l^{(n)}$ は式 (1) を適用すると次のように書ける．

$$\begin{aligned} \left| E_l^{(n)} \right| &\leq \frac{(b-a)^{2n+1} (n!)^4}{(2n+1) ((2n)!)^3} f^{(2n)}([a, b]) \\ &\leq \frac{5}{4} (b-a) \left(\frac{b-a}{\sqrt{15}\delta} \right)^{2n} M_\delta \end{aligned} \quad (2)$$

3.2 Gauss-Chebyshev 則

I_2 型の積分に対する Gauss-Chebyshev 則の誤差項 $E_c^{(n)}$ は式 (1) を適用すると次のように書ける．

$$\begin{aligned} \left| E_c^{(n)} \right| &\leq \frac{2\pi}{(2n)!} \left(\frac{b-a}{4} \right)^{2n} f^{(2n)}([a, b]) \\ &\leq 2\pi \left(\frac{b-a}{4\delta} \right)^{2n} M_\delta \end{aligned} \quad (3)$$

4 提案手法

1. 次の $\delta_0, \delta_\infty, \delta_1, \delta_2$ を考える .

$$\delta_0 = \frac{4}{15} (b - a)$$

$$\delta_\infty = 5 (b - a)$$

$$\delta_1 = \frac{\delta_0 + \delta_\infty}{2}$$

$$\delta_2 = \sqrt{\delta_0 \cdot \delta_\infty}$$

2. 定義にならって $M_{\delta_0}, M_{\delta_\infty}, M_{\delta_1}, M_{\delta_2}$ を計算する .

3. $M_{\delta_0}, M_{\delta_\infty}, M_{\delta_1}, M_{\delta_2}$ を用いて補間を行ない, M_δ の概形を次のどちらかの関数で近似する .

(a) $\tilde{M}_\delta = C_1 \cdot C_2^\delta + C_3$

(b) $\tilde{M}_\delta = D_1 \cdot \delta^{D_2} + D_3$

なお, 近似の精度は相対誤差で判定する .

4. 採用された式を式 (2) や式 (3) に代入し, その式における δ に関する極値 δ' を近似計算で求める .

5. 求めた極値 δ' が極小値の資格があるならば, $M_{\delta'}$ を計算する .

6. 誤差項の許容誤差を ε' とすれば,

$$\text{式 (2)} < \varepsilon', \quad \text{式 (3)} < \varepsilon'$$

を満たす最小の n を出力する .

7. 得られた n を用いて定めた数値積分法における近似解を求め, ε' と近似解の解区間幅の和がユーザの入力した許容誤差 ε 以下になることを確認し, 精度保証された解区間を得る .

5 具体例による性能評価

例 1

$$I = \int_{-1}^1 \exp(10x) dx$$

許容誤差 ε'	$1e-4$	$1e-8$	$1e-16$
数学的に得た n	14	17	21
提案手法で得た n	15	18	22

例 2

$$I = \int_{-1}^1 \frac{\sin(10x)}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

許容誤差 ε'	$1e-4$	$1e-8$	$1e-16$
数学的に得た n	10	14	19
提案手法で得た n	14	15	20

例 3

$$I = \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+3}} dx$$

許容誤差 ε'	$1e-4$	$1e-8$	$1e-16$
数学的に得た n	4	8	15
提案手法で得た n	6	10	19

例 4

$$I = \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{x^2-4}} dx$$

許容誤差 ε'	$1e-4$	$1e-8$	$1e-16$
数学的に得た n	6	13	26
提案手法で得た n	11	20	38

6 自動微分との区間演算回数の比較

n 階微分値の上限を求めるのに必要な区間演算の回数について述べる .

- 区間型の演算時間は, 浮動小数点数の演算時間と比べて, 数百倍程度時間がかかる . そのため, 実行時間は区間型の演算を行なった回数に大きく依存する .
- 自動微分アルゴリズムの区間型の演算回数は, 微分階数 n を用いて $O(n^2)$ である .
- 提案手法の区間型の演算回数は微分階数 n には依存せず計算できる .
- 例として, $k > n$ に対して

$$f(x) = x(x+1)(x+2)(x+3)\dots(x+k)$$

とした時の n 階微分の上限を求める際の区間演算の回数は, 自動微分アルゴリズムでは $0.5(3n^2 + 5n + 4)k$ 回, 提案手法では $160k$ 回である .

参考文献

- [1] 大石進一: 精度保証付き数値計算, コロナ社 (2000).
- [2] P. J. Davis and P. Rabinowitz: Methods in Numerical Integration. Academic Press, (1975).
- [3] 牧野内三郎, 鳥居達生: 数値計算, オーム社 (1975) .
- [4] 長田直樹: 数値微分積分法 BASIC と PAD による, 現代数学社 (1987).