修士論文概要書

CD

平成20年2月提出　　　　学籍番号 3606U036-8

専攻名（専門分野）	情報・ネットワーク	氏　名	木原 瞬	指　導 教　員	大石　進一　　　印
研究指導名	情報数理工学				
研　究 題　目	楕円型偏微分方程式の解に対する精度保証について				

1　背景

近年では数値計算の誤差解析の精度を厳密に保証する手法が飛躍的に発達し, 多くの場合, 近似解の精度保証が近似解を得る手間の数倍程度で可能であることがわかった. また, それに加えて計算機の高速化も伴っていくため, 近い将来, 数値計算において, 任意に精度保証を付加することが日常的になると考えられる.

本論文の目的は, 楕円型偏微分方程式の解に対する精度保証を行うことである. 偏微分方程式の解の一意存在を証明する代表的な手法として様々な手法が知られている. その中で中尾先生の方法を用い, 今まで研究されていない方程式に適用する.

2　関数空間の定義

中尾先生の方法 [3] は, 関数解析の理論を基盤にして, 解の一意存在性を証明している. そこで必要な関数空間を紹介しよう. 長方形領域 $\Omega = (0,1)\times(0,1)$ に対して,$L^2(\Omega), H^1(\Omega), H_0^1(\Omega)$ を次のように定義する.

$$
\begin{aligned}
L^2(\Omega) &:= \{v|\int_\Omega |v|^2 dxdy < \infty\}\\
H^1(\Omega) &:= \{v\in L^2(\Omega)|\partial^\alpha v \in L^2(\Omega) \quad |\alpha|\le 1\}.\\
H_0^1(\Omega) &:= \{v\in H^1(\Omega)|v=0 \quad \text{on} \quad \partial\Omega\}.
\end{aligned}
$$

$H_0^1(\Omega)$ の内積を

$$(u,v)_{H_0^1} := (\nabla u, \nabla v) \qquad u,v\in H_0^1(\Omega)$$

と定義する.　また S_h としてパラメータ h に依存する $H_0^1(\Omega)$ の有限次元部分空間とし,$S_h^\perp$ を S_h の直交補空間, すなわち

$$S_h^\perp = \{v \in H_0^1(\Omega)|(v,u)_{H_0^1} = 0 \quad {}^\forall u\in S_h\}$$

とする. さらに射影 P_h を $H_0^1(\Omega)$ から S_h への射影とする.

3　実際の計算手法

3.1　扱う方程式

次の 2 階線形偏微分方程式を考える.

$$
\begin{cases}
-\Delta u + u = f & \text{in} \quad \Omega,\\
u = 0 & \text{on} \quad \partial\Omega.
\end{cases} \tag{1}
$$

ここで

$$\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2$$

$$f = (8\pi^2+1)\sin 2\pi x \sin 2\pi y$$

とする. また, 真の解 u は

$$u = \sin 2\pi x \sin 2\pi y$$

である.

3.2　近似解と誤差

任意の $\phi\in S_h$ に対して, 有限要素解 u_h は

$$(\nabla u_h, \nabla\phi) + (u_h, \phi) = (f, \phi)$$

を満たす. この u_h は $\hat{u}$ の S_h への H_0^1 射影 $P\hat{u} = u_h$ になっている:

$$
\begin{cases}
-\Delta \hat{u} = f(x) - u_h & \text{in} \quad \Omega,\\
\hat{u} = 0 & \text{on} \quad \partial\Omega.
\end{cases} \tag{2}
$$

(1) − (2) より,

$$
\begin{cases}
-\Delta(u-\hat{u}) + u - u_h = 0 & \text{in} \quad \Omega,\\
u - \hat{u} = 0 & \text{on} \quad \partial\Omega.
\end{cases} \tag{3}
$$

となる. ここで

$$w = u - \hat{u} \qquad V_0 = \hat{u} - u_h$$

とおくと

$$
\begin{cases}
-\Delta w = -(w + V_0) & \text{in} \quad \Omega,\\
w = 0 & \text{on} \quad \partial\Omega.
\end{cases} \tag{4}
$$

と書ける．ここで,$A=(-\Delta)^{-1}$ とおくと $A : L^2 \to H_0^1$ へのコンパクト作用素となっているので, いま, 非線形作用素 F を

$$F(w) \equiv A(-w-V_0)$$

として定義すれば F は $H_0^1(\Omega)$ から $H_0^1(\Omega)$ への compact 作用素となる. これにより不動点形式

$$w = F(w) \tag{5}$$

が導出される.

3.3 解の存在の証明

ここで (5) を次のように有限次元の部分と無限次元の部分に分けて考える.

$$\begin{aligned} P_h w &= P_h F(w), \\ (I-P_h)w &= (I-P_h)F(w). \end{aligned} \tag{6}$$

(6) の上の式に Newton Method を用い, それを $P_hN(w)$ とおく, すなわち

$$P_hN(w) \equiv P_h w - [P_h - P_h F'(u_h)]^{-1}(P_h w - P_h F(w))$$

と定義する.

いま作用素 T を

$$T(w) \equiv P_hN(w) + (I-P_h)F(w)$$

と定義する．すると,Schauder の不動点定理より

$$T(W) \equiv \{T(w) | w \in W\} \subset W$$

となる $H_0^1(\Omega)$ の有界凸閉部分集合 W が見つかれば (5) を満たす $T(W)$ の元 w が一意に存在することが示せる.

3.4 計算機での表現

そこで,$T(W) \subset W$ なる $W \subset H_0^1(\Omega)$ をどのようにして計算機内で表現するか考える. 作用素 $T(w)$ の構成に着目して無限次元である W を有限次元の部分 S_h と無限次元の部分 $S_h^\perp$ に分ける. すなわち

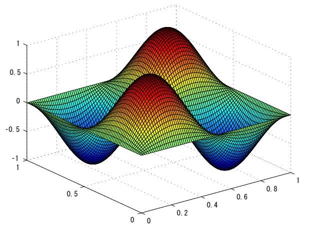
$$W = W_h \oplus W_h^\perp, \quad W_h \subset S_h, \quad W_h^\perp \subset S_h^\perp$$

となる. よって,

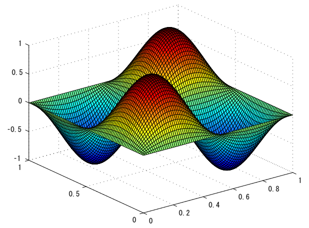
- $P_hN(W) \subset W_h$
- $(I-P_h)F(W) \subset W_h^\perp$

が示せればよい.

4 数値実験結果



真の解のグラフ



分割数 $n=80$ の近似解のグラフ

5 精度保証

分割数 n	4	20	40	60
W_h	0.0509	0.0402	0.0250	0.0184
α	0.0057	0.0045	0.0028	0.0021
$W_n+\alpha$	0.0566	0.0447	0.0278	0.0205

6 実行時間

各分割数における有限要素近似, そして精度保証にかかった時間は以下の通りである. ここでは 5 回の実行における平均の数値を示す.

分割数 n	4	20	40	60
有限要素近似 (s)	0.0154	0.203	3.4404	24.9314
精度保証 (s)	0.0282	0.3252	6.8500	50.2282

7 結論・考察

これらの結果により,(1) で挙げた楕円型偏微分方程式に対して, 中尾先生の方法による精度保証が可能であり, 近似にかかる 2 倍程度の短い実行時間で行えることが分かった.

参考文献

[1] 大石進一: 精度保証付き数値計算，コロナ社 (2000).

[2] 山本哲郎: 2 点境界値問題の数理, コロナ社 (2006).

[3] Mitsuhiro T.Nakao，Nobito Yamamoto: *Numerical Verification of Solutions for Nonlinear Elliptic Problems Using an L^∞ Residual Method*, Journal of Mathematical Analysis and Applications 217, 246-262(1998),Article No.AY975712.

[4] 菊池文雄: 有限要素法概説, サイエンス社 (1980).

[5] 河村哲也: 線形代数と数値解析, 朝倉書店 (2005).