修 士 論 文 概 要 書

CD

2007 年　２月提出　　　　学籍番号3605U119-8

専攻名（専門分野）	情報・ネットワーク専攻	氏 名	町田　知也	指 導 教 員	大石　進一　　印
研究指導名	情報数理工学研究				
研 究 題 目	数学関数における多数桁高速計算法の適用				

１．はじめに

sin(x),cos(x),arctan(x),log(x),exp(x)などの三角関数、対数関数、指数関数、逆三角関数などの数学関数はTaylor展開で無限級数に展開することができる。このような無限級数に展開できる関数を多数桁の精度で実際に値が保証されているかどうか、また高速に計算する方法を数値実験によって確かめる事が本研究の目的である。

また、本研究では数学関数を多数桁計算するにあたって、分割有理数化法（DRM法）を利用し、多数桁乗算の計算に高速剰余変換（FMT）を使用している。DRM法は級数展開されたn桁関数値の計算方式で、入力値がO(1) 桁でもO(n) 桁でも高速に計算することが可能な方法である。入力値がO(1) 桁の例で2002年11月に発表された10進1兆2411億桁のπ計算記録があるが、多数桁関数システムとして閉じるために、入力値もO(n)桁としてn桁精度の数学関数への具体的適用方法と数値実験結果を述べる。

２．DRM法

三角関数、指数関数、対数関数および逆三角関数などの数学関数はTaylor展開で無限級数に展開できる。このような無限級数に展開できる関数をｎ桁（多数桁）の精度で計算するためには、適当な項数で打ち切り、各項ごとに多数桁計算を行いそれらの和を用いる方法が知られている。

この方法の場合、ｎ桁の乗算の演算量をM(n) とするとき、入力値の精度がO(1) 桁（計算機の倍精度で表示できる程度以内の桁数）の有理数の場合には、ｎ桁精度の関数値計算に$O(n^2)$ の計算量が必要である。また、入力値がｎ桁精度の場合には$O(M(n)\cdot n)$ の計算量が必要である。これに対して、ｎ桁精度の関数値計算に、分割統治法に基づく分割有理数化法（DRM法、Divide and Rationalize Method）を適用することで、入力値がO(1) 桁の有理数の場合には計算量を$O(M(n)\cdot(\log_2 n)^2)$ 以下に、また入力値がO(ｎ)桁精度で、初等関数のように加法定理が適用できる場合には、計算量を$O(M(n)\cdot(\log_2 n)^3)$ 以下に削減することができる。

このDRM法は２つの方法から構成される。第１の方法では入力値の精度がO(1) 桁の有理数の場合にｎ桁の乗算の演算量をM(n)とするとき、トーナメント有理数化処理で級数に展開される関数のｎ桁精度関数値計算の計算量を$O(M(n)\cdot(\log_2 n)^2)$ 以下に削減する。第２の方法では加法定理が適用できる関数の多数桁計算において、ｎ桁精度の入力値を上位桁から分母の桁数がα、２α、４α、…、$2^{p-1}\alpha$桁ずつの有理数に分割する。各分割した値に対する関数値計算の演算量をT(n) とするとき、ｎ桁精度の関数値の計算を$O(T(n)\cdot\log_2 n)$ の計算量で実現する。この２つの方法を結合して多数桁精度の入力で多数桁の関数値計算の計算量を大幅に削減するのがDRM法である。

また、DRM 法は連分数で表現される関数値の多数桁精度の計算および２進 10 進変換に代表される多数桁の基底変換にも適用可能である。

DRM 法は多数桁精度を必要とする関数値計算に適用でき、各種数学関数を含めた多数桁計算システムの構築に有用である。

３．　入力値が O(1)桁のＮ桁級数値計算

DRM 法の原理は無限級数（有理数）をトーナメント方式で通分し、項数を半分、桁数を２倍にするものである。ここでは一般的な有理数の場合の計算原理と具体的な例として arctan （x） の計算方法を示す。

［計算原理］

$$F(x)=\left(\frac{A_1}{B_1}+\frac{A_2}{B_2}\right)+\left(\frac{A_3}{B_3}+\frac{A_4}{B_4}\right)+\left(\frac{A_5}{B_5}+\frac{A_6}{B_6}\right)+\left(\frac{A_7}{B_7}+\frac{A_8}{B_8}\right)$$

$$=\left(\frac{C_1}{D_1}+\frac{C_2}{D_2}\right)+\left(\frac{C_3}{D_3}+\frac{C_4}{D_4}\right)=\left(\frac{E_1}{F_1}+\frac{E_2}{F_2}\right)=\frac{G_1}{H_1}$$

ここで、項数を半分に桁数を２倍化する通分をつづける。

$$D_i=B_{2i-1}\cdot B_{2i},\quad C_i=A_{2i-1}\cdot B_{2i}+A_{2i}\cdot B_{2i-1},\quad i=1,2,3,4$$

$$F_j=D_{2j-1}\cdot D_{2j},\quad E_j=C_{2j-1}\cdot D_{2j}+C_{2j}\cdot D_{2j-1},\ j=1,2$$

$$H_1=F_1\cdot F_2,\qquad G_1=E_1\cdot F_2+E_2\cdot F_1$$

［計算例］

$$\arctan\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x}-\frac{1}{3\cdot x^3}+\frac{1}{5\cdot x^5}-\frac{1}{7\cdot x^7}+\frac{1}{9\cdot x^9}-\frac{1}{11\cdot x^{11}}+\Lambda$$

$$=\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{3\cdot x^3}\right)+\left(\frac{1}{5\cdot x^5}-\frac{1}{7\cdot x^7}\right)+\left(\frac{1}{9\cdot x^9}-\frac{1}{11\cdot x^{11}}\right)+\Lambda$$

$$=\frac{1}{x}\cdot\left(\frac{3\cdot x^2-1}{3\cdot x^2}+\frac{1}{x^4}\cdot\frac{7\cdot x^2-5}{35\cdot x^2}+\frac{1}{x^8}\cdot\frac{11\cdot x^2-9}{99\cdot x^2}+\frac{1}{x^{12}}\cdot\frac{15\cdot x^2-13}{195\cdot x^2}+\Lambda\right)$$

$$=\frac{1}{x}\cdot\left(\left(\frac{a_1}{b_1}+\frac{1}{x^4}\cdot\frac{a_3}{b_3}\right)+\frac{1}{x^8}\cdot\left(\frac{a_5}{b_5}+\frac{1}{x^4}\cdot\frac{a_7}{b_7}\right)+\Lambda\right)$$

$$=\frac{1}{x}\cdot\left(\left(\frac{a_1\cdot b_3\cdot x^4+a_3\cdot b_1}{b_1\cdot b_3\cdot x^4}+\frac{1}{x^8}\cdot\frac{a_5\cdot b_7\cdot x^4+a_7\cdot b_5}{b_5\cdot b_7\cdot x^4}\right)+\Lambda\right)$$

$$=\frac{1}{x}\cdot\left(\left(\frac{c_1}{d_1}+\frac{1}{x^8}\cdot\frac{c_5}{d_5}\right)+\Lambda\right)$$

$$=\frac{1}{x}\cdot\left(\frac{c_1\cdot d_5\cdot x_8+c_5\cdot d_1}{d_1\cdot d_5\cdot x^8}+\frac{1}{x_{16}}\cdot\frac{\Lambda}{\Lambda}+\Lambda\right)$$

[計算量]

入力値が O(1)桁の有理数の計算量を T(n)としたとき DRM 法の論文[1]に下記が示されている。M(n)は乗算の計算量である。

$$O(M(n)) \le O\left(M(n) \cdot (\log_2 n)^2\right)$$

4．入力値が O(N)桁の N 桁級数値計算

一般的に、n 桁の実数 x を上位桁から分母の桁数が $\beta, 2\beta, 4\beta, ..., 2^{p-1}\beta$ 桁の p 個の有理数に分解し、各関数値を計算して加法定理で合成する。

4.1 指数(exp)関数の計算方法

$$\exp(x) = \exp\left(x_0 + \frac{x_1}{b^{\alpha}} + \frac{x_2}{b^{2\alpha}} + \Lambda + \frac{x_p}{b^{2^{p-1}\alpha}}\right)$$

$$= \exp(x_0) \cdot \exp\left(\frac{x_1}{b^{\alpha}}\right) \cdot \exp\left(\frac{x_2}{b^{2\alpha}}\right) \Lambda \exp\left(\frac{x_p}{b^{2^{p-1}\alpha}}\right)$$

$x = 3.18372457367840$29の例 $(b = 10,\ \alpha = 1,\ p = 5)$

$$x_0 = 3,\quad x_1 = 2,\quad x_2 = -2,\quad x_3 = 37,$$
$$x_4 = 2457,\quad x_5 = 36784029$$

4.2 計算量（入力値が n 桁の実数）

入力値が O(1)桁の有理数の計算量を T(n)とすると、入力値が n 桁の実数の計算量を $T_n(n)$としたとき DRM 法の論文[1]に下記が示されている。

$$O(T_n(n)) \le O(T_n(n) \cdot \log_2 n)$$

5．高速剰余変換(FMT)

多数桁乗算の計算法は筆算による方法、中国剰余定理、Karatsuba 法、高速フーリエ変換（以下、FFT）ならびにこれらを組み合わせた方法が知られている。計算桁数が多い場合はこれらのなかで FFT が最も計算量が少ない。しかし、FFT を使用した多数桁乗算は FFT の計算で多くのメモリを使用し、分割して使用すると演算量が増加する。

高速剰余変換(FMT)[2]はその FFT に剰余理論を取り込んだもので多数桁の乗算で FFT の高速性を生かしながらメモリの使用量を減少させる方法である。

また、数値実験を行う際の多数桁乗除算、加減算の部分のプログラムは[2]の著者のプログラムを使用している。

6．数値実験

高速計算の理論を実践するために、数値実験を行った。入力値もO(n)桁として実験を行っている。本概要書には、exp(x)の数値実験結果を記す。

・評価した関数

(1)　exp関数でexp(-1/2)を入力値

(2)　入力と出力は共にn桁

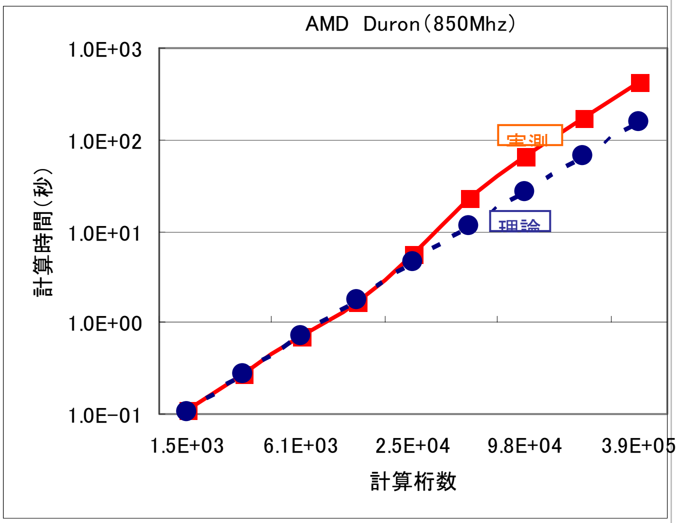
(3)　1要素に10進6桁を詰めて計算

・使用した計算機

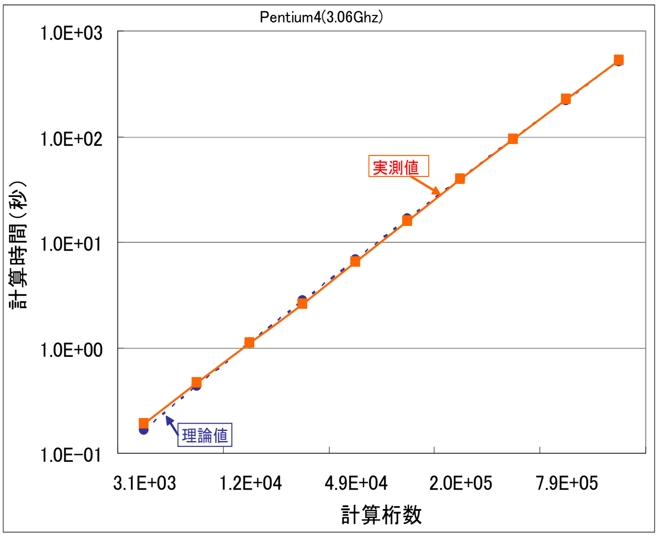
(1) AMD Duron(850Mhz),　Digital Fortran V5.0A

(2) Pentium4(3.06Ghz), GNU Ver3.3.1

(1) exp(x), 計算機：AMD Duron(850Mhz)



(2) exp(x), 計算機：Pentium4(3.06Ghz)



(1) の計算機AMD Duron(850Mhz)では、１０万桁付近から実測値が理論値とずれてしまっている。これは、おそらくキャッシュの効果によるものだろう。一方、(2)のPentium4(3.06Ghz)では、実測値が理論値と殆ど同じ評価をしている。

5．まとめ

多数桁のexp(x) をDRM法で計算した。

n桁のexp(x)の計算時間は$O(M(n) \cdot (\log_2 n)^2)$になることを確認した。

参考文献

[1] 後　保範、金田康正、高橋大介：級数に基づく多数桁計算の演算量削減を実現する分割有理数化法、情報処理学会論文誌、Vol41, No6, pp.1811-1819 (2000).

[2] 後　保範：高速剰余変換による多数桁乗算、情報処理学会論文誌、Vol44, No12, pp.3131-3138 (2003).

[3] 後　保範：多数桁計算における高速アルゴリズムの研究、学位論文、早稲田大学、 pp.1-111(2005).