修士論文概要書

2007 年 2 月提出　　　学籍番号 3605U067-8

<table>
<tr><td>専攻名
（専門分野）</td><td>情報・ネットワーク
高度計算機構</td><td rowspan="2">氏名</td><td rowspan="2">佐藤　友規</td><td rowspan="2">指導教員</td><td rowspan="2">大石　進一　印</td></tr>
<tr><td>研究指導名</td><td>情報数理工学</td></tr>
<tr><td>研究題目</td><td colspan="5">SDP 問題における精度保証の MATLAB による実装</td></tr>
</table>

概要

本研究では、SDP 問題を現在公開されているソルバを用いて近似解を計算したのち，その最適値の精度保証をおこなうことを目的としている．精度保証にあたっては MATLAB を使用している．

1　SDP 問題

次の半正定値計画問題を考える．この問題については表現が様々であるが，ここでは，ブロック対角化された形を考えることにする。

$$p^* := min \sum_{j=1}^{n} < C_j, X_j > \tag{1}$$

$$s.t. \quad \sum_{j=1}^{n} < A_{ij}, X_j >= b_i \quad (i = 1, \ldots, m) \tag{2}$$

$$X_j \succeq 0 \quad (j = 1, \ldots, n) \tag{3}$$

C_j, A_{ij}, X_j を対称 $s_j \times s_j$ の行列とし，$b \in R^m$ とする．ここで，$<, >$ とは，

$$< C_j, X_j >= trace({C_j}^T X_j) \tag{4}$$

である．このときの双対問題は

$$d^* := max b^T y \tag{5}$$

$$s.t. \quad \sum_{i=1}^{m} y_i A_{ij} \preceq C_j \quad (j = 1, \ldots, n) \tag{6}$$

ここで $y \in R^m$ である．

2　下限

区間行列として $\mathbf{C}_j, \mathbf{A}_{ij}, \in \mathbf{IR}^{s_j \times s_j}$,$i = 1, \ldots, m$,$j = 1, \ldots, n$ 及び，区間ベクトル $\mathbf{b} \in \mathbf{IR}^m$ が与えられている．これらを，一組の半正定値計画問題 $\mathbf{P} := (\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{C})$ とする．下限については，以下の式によって求められる．$\mathbf{P}$ によって，入力された一組の P が抑えられ，双対問題の近似解 $\tilde{y} \in R^m$ が得られているとき，

$$\mathbf{D}_j := \mathbf{C}_j - \sum_{i=1}^{m} y_i \mathbf{A}_{ij} \quad (j = 1, \ldots, n) \tag{7}$$

とし，

$$0 \le \underline{d}_j \le \lambda_{min}(\mathbf{D}_j) \quad (j = 1, \ldots, n) \tag{8}$$

となる $\underline{d}_j$ があるとする．ここで，$\lambda_{min}(\mathbf{D}_j)$ は，区間行列 $\mathbf{D}_j$ の固有値の最小値の下限を示す．同様に，$\lambda_{min}(\mathbf{X}_j)$ を区間行列 $\mathbf{X}_j$ の固有値の最小値の下限として

$$0 \le \underline{x}_j \le \lambda_{min}(\mathbf{X}_j) \quad (j = 1, \ldots, n) \tag{9}$$

が分かっているとするならば，全ての $P \in \mathbf{P}$ に対して，最適解の下限は以下のように抑えられる．

$$p^*(P) \ge \inf\{\mathbf{b}^T \tilde{y} + \sum_{j=1}^{n} s_j \cdot \underline{d}_j \cdot \underline{x}_j\} \tag{10}$$

3　上限

最適値の上界は以下のように計算される．一組の半正定値計画問題 $\mathbf{P} := (\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{C})$ が与えられているとする．このとき，$j = 1, \ldots, n$ に対して区間行列 $\mathbf{X}_j (j = 1, \ldots, n)$ が存在するとする．すなわち，

$$\forall b \in \mathbf{b}, A_{ij} \in \mathbf{A}_{ij}, i = 1, \ldots, m j = 1, \ldots, n$$

$$\exists symmetric X_j \in \mathbf{X}_j : \sum_{j=1}^{n} < A_{ij}, X_j >= b_i \tag{11}$$

であり，$j = 1, \ldots, n$ かつ，全ての対称行列 $X_j \in \mathbf{X}_j$ に対して，

$$X_j \succeq 0 \tag{12}$$

であるならば，最適解の上限は以下のように抑えられる．

$$p^*(P) \le \sup\{\sum_{j=1}^{n} < C_j, X_j >\} \tag{13}$$

Problem	l_p	u_p
truss1	8.99999e+000	8.99999e+000
arch0	-Inf	-5.66517e-001
control1	-1.77846e+001	-1.77846e+001
gpp100	-Inf	4.49435e+001
mcp100	-2.26157e+002	-2.26157e+002
mcp124-1	-Inf	-7.02392e+001
qap5	4.35999e+002	4.36000e+002
theta1	-2.30000e+001	-2.29999e+001
theta2	-3.28792e+001	-3.28791e+001
truss2	1.23380e+002	1.23380e+002
truss3	9.10999e+000	9.10997e+000

表 1: 上限と下限

4　結果

以上の理論を元に，精度保証を行う．具体的なプロセスを説明する．精度保証を行う前に，まず近似解の計算が必要である．近似解の計算については SDP のソルバとして公開されている SDPT3 を利用した．近似解が得られた後，上限及び下限を計算する．適宜，必要に応じて時間の計測を行った．なお，問題のサイズがあまり大きくないためあまりマシンのスペックにはこだわらないことにした．また，表中 l_p,u_p はそれぞれ得られた下限と上限を示している．また，t_p,t_l,t_u は近似解を得るのにかかった時間，下限を求めるのにかかった時間，上限を求めるのにかかった時間を示す．いずれも単位は sec である．

5　実行環境

1. CPU : Intel(R) Pentium(R) M processor 1.20Hz
2. Memory : 758MB
3. OS : Windows XP
4. MATLAB 7.1.0.246(R14) Service Pack 3

6　考察

本研究は，SDP 問題における上限と下限を抑えることを目的としていた．しかしながら，上限と下限を抑える前提条件として，近似解の計算が適切に行われている必要がある．例えば，前記表中 termcode が-5 などの場合には，近似解として計算されている主問題と双対問題の最適値が弱双対定理を満たしていない場合もあった．この状態では，たとえ，いずれの問題の半正定値性が保たれているとしても精度保証の意味をなさなくなる．
また，下限については計算できないこともしばしばあった．類似のソフトとしては，現在 VSDP が公開されているがこれは，下限については固有値を計算しない方法をとっている．これにより下限の計算も行えることがある．また上限については，VSDP に比べ，有利な効果が認められた．固有値の精度保証が決めてとなったといえる．

参考文献

[1] 大石 進一, 精度保証付き数値計算, コロナ社,2000

[2] 大石進一. 数値計算, 裳華房,1999.

[3] 藤田　宏，今野　浩，田邉　國士. 最適化法, 岩波書店,1998

[4] C.Jansson and C.Keil:”Rigorous Error Bounds for the Optimal Value in Semidefinite Programming”,SIAM Journal on Numerical Analysis,2005

[5] S. Miyajima, T. Ogita, S. Oishi: Fast Verification for Respective Eigenvalues of Symmetric Matrix, Lecture Notes in Computer Science 3718, Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg, 2005, 306-317

[6] etc... 論文を参照