

(偏微分方程式の)

# 数値計算の落とし穴

齊藤 宣一 (SAITO, Norikazu)

東京大学大学院数理科学研究科

JSIAM 三部会連携「応用数理セミナー」  
2017 年 12 月 26 日 早稲田大学西早稲田キャンパス



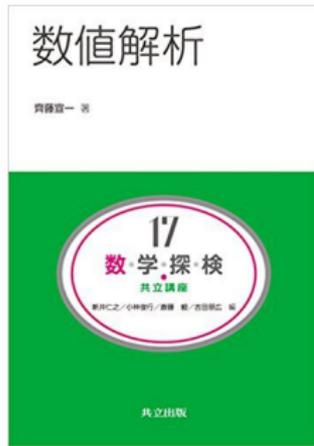
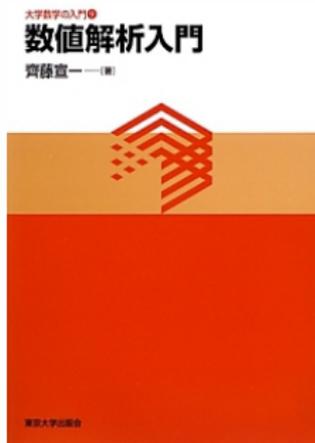
Graduate School of Mathematical Sciences  
THE UNIVERSITY OF TOKYO

# 目次

- ① まえおき
- ② Poisson 方程式の有限要素近似
- ③ 有限要素法の収束
- ④ 重調和問題の有限要素近似
- ⑤ オリジナルの Babuška のパラドックス
- ⑥ まとめ

- ① まえおき
- ② Poisson 方程式の有限要素近似
- ③ 有限要素法の収束
- ④ 重調和問題の有限要素近似
- ⑤ オリジナルの Babuška のパラドックス
- ⑥ まとめ

# 参考書



- 齊藤宣一「数值解析入門」東京大学出版会，2012年10月，3,150円
- 齊藤宣一「第8講 数值解析—偏微分方程式の解を“見る”」，斎藤毅，河東泰之，小林俊行（編）『数学の現在 e』東京大学出版会，2016年5月，3,240円
- 菊地文雄，齊藤宣一「数值解析の原理—現象の解明をめざして」岩波書店，2016年8月，6,800円
- 齊藤宣一「数值解析」共立出版，2017年3月，2,500円

# 偏微分方程式以外での数値計算の落とし穴の例

## 問題 1

$$10^{48} + 543.2 - 10^{48} - 10^{36} + 123.4 + 10^{36} = ?$$

## 答

666.6 となるはず.

## 問題 2

### 漸化式

$$x_{k+1} = \frac{7}{3}x_k - \frac{2}{3}x_{k-1} \quad (k \geq 2), \quad x_2 = \frac{2}{3}, \quad x_1 = 2.$$

よって定められる数列  $\{x_k\}_{k \geq 1}$  について,  $k \rightarrow \infty$  のときの  $x_k$  の挙動を調べよ.

## 答

### 漸化式の解は

$$x_k = 6 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^k \quad (k \geq 1)$$

であり,  $k \rightarrow \infty$  のとき,  $x_k \rightarrow 0$  となるはず.

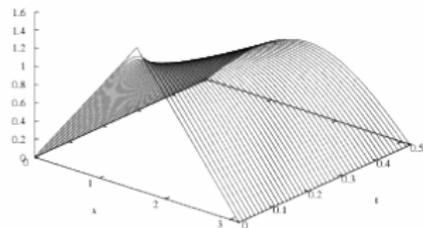
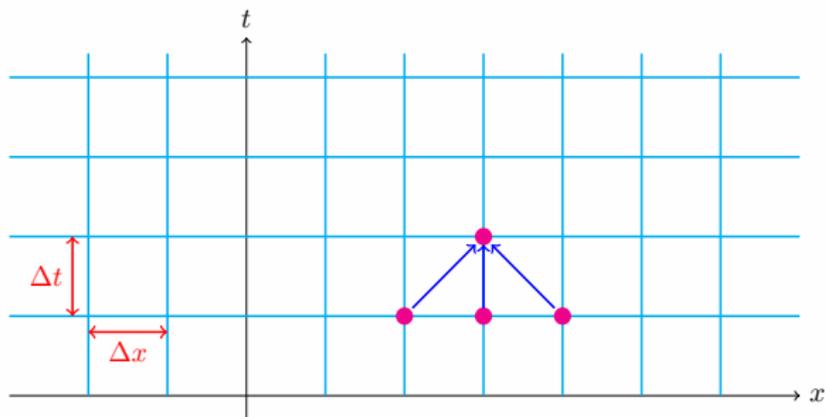
# 熱方程式の差分解法

$$u = u(x, t)$$

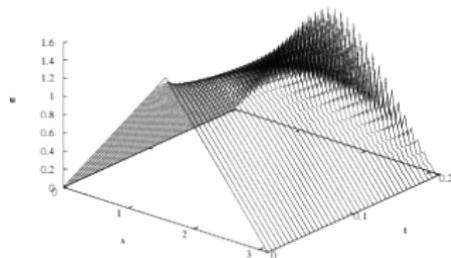
$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

安定性の条件

$$\lambda = \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \leq \frac{1}{2}$$



$$\lambda = 0.4$$



$$\lambda = 0.51$$

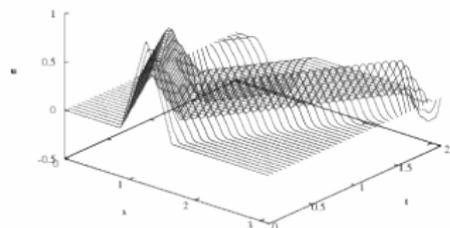
# 波動方程式の差分解法

$$u = u(x, t)$$

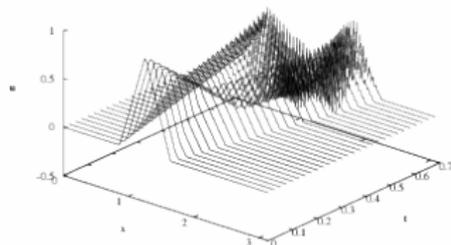
安定性の条件

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$\lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1$$



$$\lambda = 0.5$$



$$\lambda = 1.01$$

これらは、「罪が軽い」。なぜなら、.....

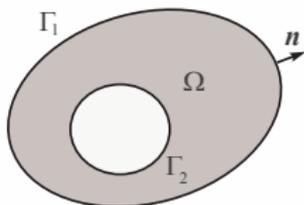
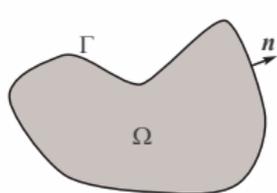
- ① まえおき
- ② Poisson 方程式の有限要素近似
- ③ 有限要素法の収束
- ④ 重調和問題の有限要素近似
- ⑤ オリジナルの Babuška のパラドックス
- ⑥ まとめ

# Poisson 方程式

## (BVP) Poisson 方程式の斉次 Dirichlet 境界値問題

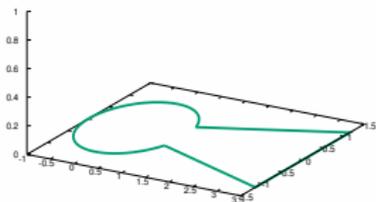
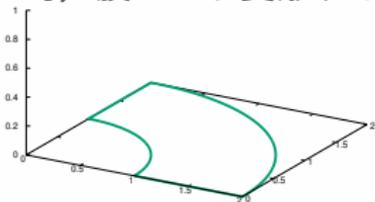
与えられた関数  $f = f(x, y)$  に対して、次を満たす関数  $u = u(x, y)$  を求めよ：

$$\underbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}}_{=\Delta u} = -f, \quad (x, y) \in \Omega, \quad u = 0, \quad (x, y) \in \Gamma = \partial\Omega$$



$\Omega$  は平面内の有界領域  
 $\Gamma = \partial\Omega$  はその境界

**背景の一つ.** 平面上に置かれた枠  $\Gamma$  に薄い膜が張ってある. 膜に力  $f = f(x, y)$  を加えた時, 膜はどう変形するか? など, など.....



# 変分問題, Euler-Lagrange 方程式, あるいは弱形式

## (VP) 変分問題 (汎関数最小化問題)

$$u \in V, \quad J(u) = \min_{v \in V} J(v). \quad \left[ J(v) = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} (v_x^2 + v_y^2) \, dx dy - \iint_{\Omega} f v \, dx dy \right]$$

## (W) 対応する停留 (Euler-Lagrange) 問題, あるいは (BVP) の弱形式

$$u \in V, \quad \iint_{\Omega} \underbrace{(u_x v_x + u_y v_y)}_{=\nabla u \cdot \nabla v} \, dx dy = \iint_{\Omega} f v \, dx dy \quad (\forall v \in V).$$

ここで, 次の関数空間を採用している.

$$V = H_0^1(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega) \mid v_x, v_y \in L^2(\Omega), v|_{\Gamma} = 0\}.$$

- $V$  は次の内積とノルムを備えた Hilbert 空間

$$(u, v)_V = \iint_{\Omega} (u_x v_x + u_y v_y) \, dx dy, \quad \|v\|_V = \sqrt{(v, v)_V}$$

- $V = C_0^\infty(\Omega)$  の  $\|\cdot\|_V$  による完備化.  $[C_0^\infty(\Omega) = \{\phi \in C^\infty(\Omega) \mid \text{supp } \phi \subset \Omega\}]$

# 停留問題と Poisson 方程式

## 定理

(VP) と (W) は同値な問題である.

## 定理

(W) には, 唯一の解が存在する.

## 定理

$\Omega$  が十分になめらかな領域で,  $f$  も十分に滑らかなら, (W) の解は  $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$  となり, (W) の式に Gauss–Green の公式を適用することで,

$$\iint_{\Omega} (-\Delta u + f)\phi \, dx dy = 0 \quad (\forall \phi \in C_0^\infty(\Omega))$$

を得る. すなわち,  $u$  は (BVP) の解となる.

## Galerkin 近似 (1/2)

$n$  を自然数として、 $V$  から一次独立な関数の列  $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$  をとり、

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^n u_k \phi_k(x, y), \quad v(x, y) = \sum_{k=1}^n c_k \phi_k(x, y)$$

の形を仮定する。これは、もちろん近似である。これを、 $(W)$  の式

$$u \in V, \quad \iint_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx dy = \iint_{\Omega} f v \, dx dy \quad (\forall v \in V)$$

へ代入すると、 $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)^T$  に対する連立一次方程式

$$(*) \quad \mathbf{A} \mathbf{u} = \mathbf{f}$$

が得られる。ただし、

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad f_i = \iint_{\Omega} f \phi_i \, dx dy, \\ a_{ij} = \iint_{\Omega} \nabla \phi_j \cdot \nabla \phi_i \, dx dy$$

## Galerkin 近似 (2/2)

### (W) 弱形式

$$u \in V, \quad \underbrace{\iint_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx dy}_{=a(u,v)} = \underbrace{\iint_{\Omega} f v \, dx dy}_{=L(v)} \quad (\forall v \in V).$$

### (G) Galerkin 近似. $V_n = \text{Span}\{\phi_1, \dots, \phi_n\} \subset V$ (有限次元部分空間)

$$u_n \in V_n, \quad a(u_n, v_n) = L(v_n) \quad (\forall v_n \in V_n).$$

### 補題

**連続性**  $|a(w, v)| \leq \|w\|_V \|v\|_V$ , **強圧性**  $a(v, v) = \|v\|_V^2$  ( $w, v \in V$ )

- Galerkin **直交性**:  $a(u - u_n, v_n) = 0$  ( $\forall v_n \in V_n$ ).
- Céa の補題 (最良近似性):  $\|u - u_n\|_V = \min_{v_n \in V_n} \|u - v_n\|_V$ .

$$\begin{aligned} \|u - u_n\|_V^2 &= a(u - u_n, u - u_n) = a(u - u_n, u - v_n) + a(u - u_n, v_n - u_n) \\ &\leq \|u - u_n\|_V \|u - v_n\|_V. \end{aligned}$$

# 有限要素法 (FEM)

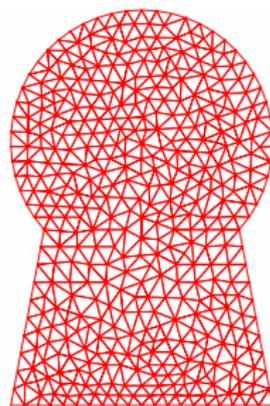
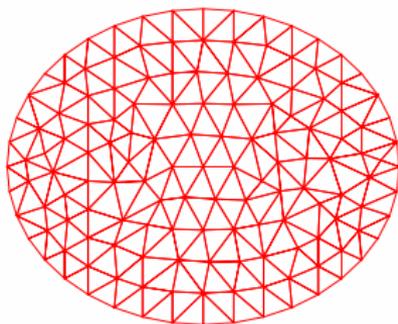
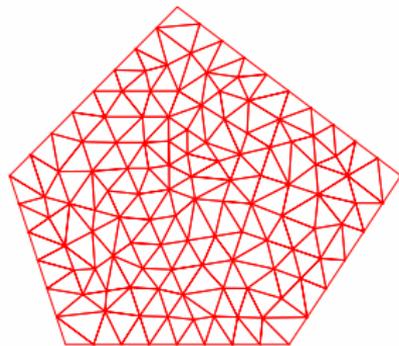
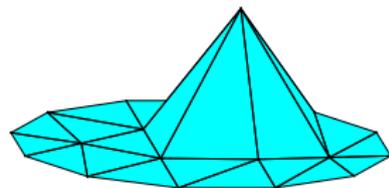
有限要素法 (finite element method, FEM) では,

- $\Omega$  を三角形 (= 要素, element) に分割し
- $V$  の基底関数  $\phi_i(x, y)$  を右図のように選ぶ

このようにしてできる関数空間

$$V_h = \{ \bar{\Omega} \text{で連続で} \\ \text{各三角形の上で一次多項式, } \Gamma \text{ 上で } 0 \}$$

を P1 要素, P1 有限要素空間などという.



# 有限要素法の誕生

R. Courant: *Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations*, Bull. Amer. Math. Soc. **49** (1943) 1–23.

As Henri Poincaré once remarked, *solution of a mathematical problem* is a phrase of indefinite meaning. Pure mathematicians sometimes are satisfied with showing that the non-existence of a solution implies a logical contradiction, while engineers might consider a numerical result as the only reasonable goal. Such one sided views seem to reflect human limitations rather than objective values. In itself mathematics is an indivisible organism uniting theoretical contemplation and active application.

This address will deal with a topic in which such a synthesis of theoretical and applied mathematics has become particularly convincing. . . .

# Appendix of Courant 1943

negligible amount of numerical labor  $S = .339$  and  $c = -.11$ . A refined attempt with the function

$$\phi = a(1 - x)[1 + \alpha(x - 3/4)y]$$

yielded  $S = .340$  and  $c = -.109$  with little more labor.

These results were checked with those obtained by our generalized method of finite differences where arbitrary triangular nets are permitted. The diagrams are self-explanatory. Unknowns are the

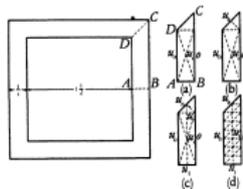


FIG. 2

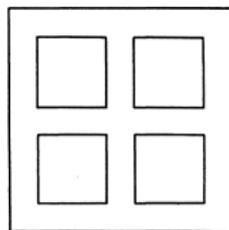


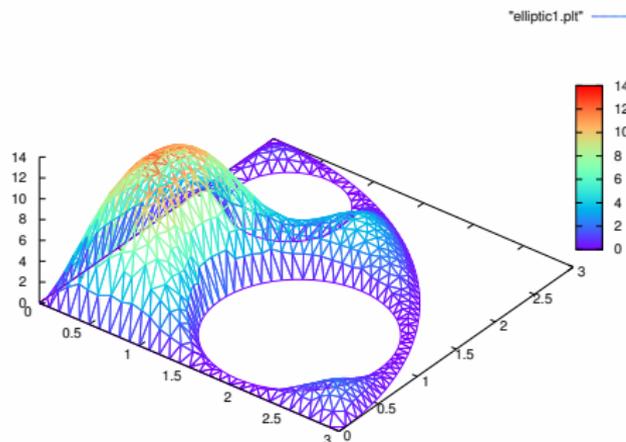
FIG. 3

net-point-values  $u_i$ , ( $c = u_0$ ). In the net-triangles our functions were chosen as linear, so that the variational problem results in linear equations for the  $u_i$ . The results, easily obtainable, were: case (a) with two unknowns:  $S = .344$ ,  $u_0 = -.11$ ; case (b) with three unknowns:  $S = .352$ ,  $u_0 = -.11$ ; case (c) with five unknowns  $S = .353$ ,  $u_0 = -.11$ ; case (d) with nine unknowns, corresponding to the ordinary difference method  $S = .353$ ,  $u_0 = -.11$ .

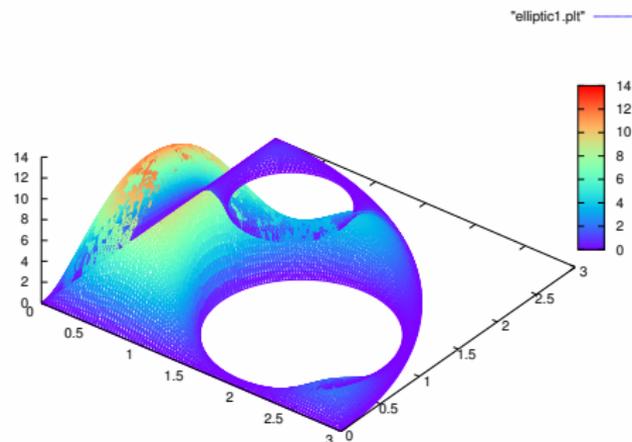
しかし、この手法が現実的な手法として認識されるには、電子計算機（コンピュータ）の登場を待たねばならなかった。

# 計算例

$$-\Delta u = (2 - x)^4 + (10 - y)^2, \quad (x, y) \in \Omega$$
$$u = 0, \quad (x, y) \in \partial\Omega.$$



$n = 673$



$n = 6707$

- ① まえおき
- ② Poisson 方程式の有限要素近似
- ③ 有限要素法の収束**
- ④ 重調和問題の有限要素近似
- ⑤ オリジナルの Babuška のパラドックス
- ⑥ まとめ

# 有限要素法の収束

(W) 弱形式

$$u \in V, \quad a(u, v) = L(v) \quad (\forall v \in V).$$

(FEM)  $V_h =$  "P1 有限要素空間"  $\subset V$

$$u_h \in V_h, \quad a(u_h, v_h) = L(v_h) \quad (\forall v_h \in V_h).$$

このとき, Céa の補題により,

$$\|\nabla(u - u_h)\|_{L^2(\Omega)} = \|u - u_h\|_V = \min_{v_h \in V_h} \|v_h - u\|_V$$

は既知である。さらに, 小林健太先生の講義で説明があったように, 次が知られている。

定理

三角形分割 (の族) に対する適当な仮定のもとで,  $\|\nabla(u - u_h)\|_{L^2(\Omega)} \rightarrow 0$  ( $h \rightarrow 0$ ) が成り立つ。とくに,  $u \in H^2(\Omega)$  ならば,

$$\|\nabla(u - u_h)\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch|u|_{H^2(\Omega)}$$

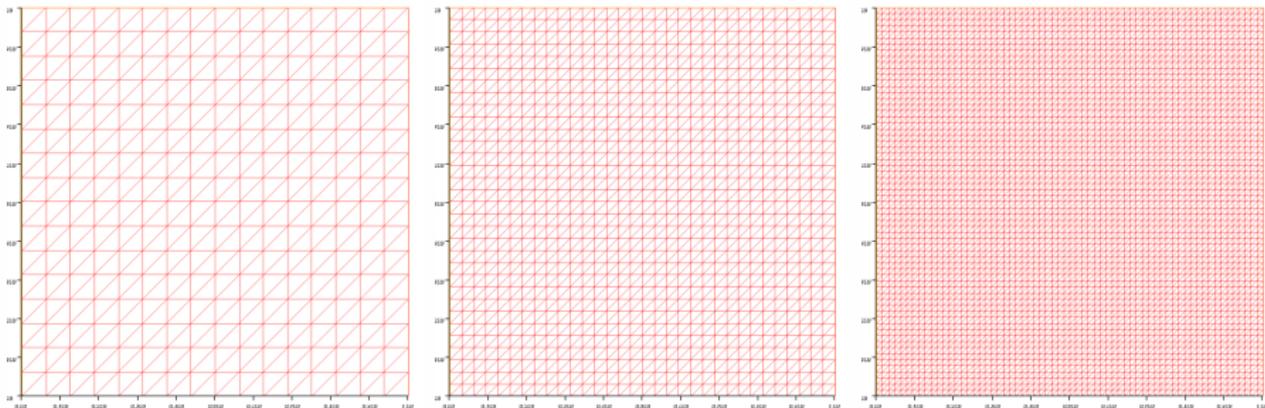
が成り立つ。さらに,  $\Omega$  が凸多角形ならば,

$$\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch^2|u|_{H^2(\Omega)}$$

# (よくある) 数値例 (1/2)

## 例題

$\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$ ,  $u(x, y) = \sin(\pi x) \sin(\pi y)$ ,  $f(x, y) = 2\pi^2 \sin(\pi x) \sin(\pi y)$ .



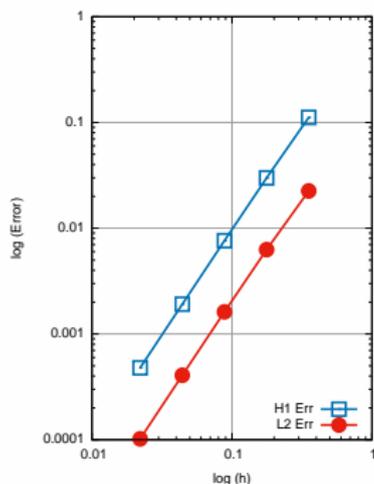
$X = V$ ,  $L^2(\Omega)$  に対して,  $\text{Err}_X = \|u - u_h\|_X$  とおく.  
( $\log h, \log \text{Err}_X$ ) をプロットして, 直線の傾きが  $\alpha$  ならば,

$$\text{Err}_X = Ch^\alpha$$

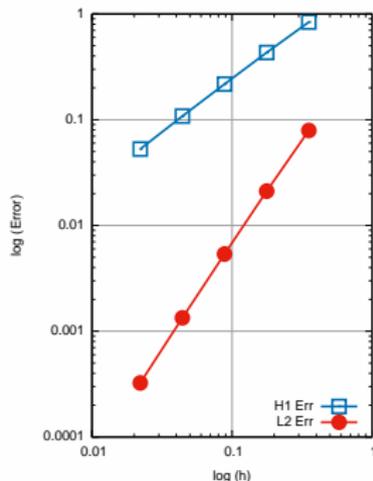
が実験的に確認できたことになる.

## (よくある) 数値例 (2/2)

とはいえ、この積分をどう厳密に計算するか？  $\Pi_h u = "$   $\mathcal{T}_h$  上への  $u$  の Lagrange 補間" として、 $\text{Err}_X$  の代わりに、 $\mathcal{E}_{X,h} = \|\Pi_h u - u_h\|_X$  を計算してみる。



本当に  $\mathcal{E}_{X,h}$  を使う



さらに細かいメッシュを使って、  
 $\mathcal{E}_{X,h}^{\text{fine}} = \|\Pi_h^{\text{fine}} u - \Pi_h^{\text{fine}} u_h\|_X$  を使う

- ① まえおき
- ② Poisson 方程式の有限要素近似
- ③ 有限要素法の収束
- ④ 重調和問題の有限要素近似**
- ⑤ オリジナルの Babuška のパラドックス
- ⑥ まとめ

# 重調和方程式の境界値問題

$\Omega$  は平面内の有界な領域である.

## 重調和方程式の境界値問題

$$\Delta^2 u = f \text{ in } \Omega, \quad u = \Delta u = 0 \text{ on } \Gamma = \partial\Omega \quad (\text{P})$$

$$\text{重調和作用素 } \Delta^2 = \Delta\Delta = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4}{\partial x^2\partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}.$$

**注意 (問題の背景)** : Stokes 方程式の滑り境界値問題

$$\begin{aligned} -\Delta \mathbf{u} + \nabla p &= \mathbf{f}, & \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 & \text{in } \Omega, \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} &= 0, & \boldsymbol{\tau}_T(\mathbf{u}) &= \mathbf{0} & \text{on } \Gamma = \partial\Omega. \end{aligned}$$

$\Omega$  が多角形なら, **流れ関数**  $\phi = \phi(x, y)$  は (P) を満たす :

$$u_1 = \frac{\partial \phi}{\partial y}, \quad u_2 = -\frac{\partial \phi}{\partial x}$$

**注意** : もう一つの物理的な意味はあとで説明する.

# 弱形式

## 弱形式

$$\text{Find } u \in U \quad \text{s.t.} \quad \iint_{\Omega} (\Delta u)(\Delta \phi) \, dx dy = \iint_{\Omega} f \phi \, dx dy \quad (\forall \phi \in U). \quad (\text{WP})$$

$$U = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega) \mid v_x, v_y, v_{xx}, v_{xy}, v_{yy} \in L^2(\Omega), v|_{\Gamma} = 0\}.$$

**注意.**  $a(u, \phi) = \iint_{\Omega} (\Delta u)(\Delta \phi) \, dx dy$  は,  $U$  で連続かつ強圧的.

**注意.**  $H^2(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega) \mid v_x, v_y, v_{xx}, v_{xy}, v_{yy} \in L^2(\Omega)\}$  は, 内積

$$(u, v)_{H^2(\Omega)} = (u, v)_{L^2(\Omega)} + (\nabla u, \nabla v)_{L^2(\Omega)} + \sum_{i,j=1,2} (\partial_i \partial_j u, \partial_i \partial_j v)_{L^2(\Omega)}$$

を備えた Hilbert 空間.  $U$  は  $H^2(\Omega)$  の閉部分空間.

**注意.** 先ほど導入した P1 有限要素空間  $V_h$  は  $V_h \not\subset U$  なので使えない.

# 分離解法

## 分離解法

$$\begin{cases} \Delta v = f \text{ in } \Omega, & v = 0 \text{ on } \Gamma, \\ \Delta u = v \text{ in } \Omega, & u = 0 \text{ on } \Gamma. \end{cases} \quad (\text{Q})$$

**注意.**  $v$  を消去すると,  $(\text{Q}) \Rightarrow (\text{P})$ ; 一方で,  $v = \Delta u$  とおくと,  $(\text{P}) \Rightarrow (\text{Q})$ .

$(\text{Q})$  は, 2つの Poisson 方程式に他ならないので, 先ほど考察した **P1 要素を用いた有限要素法**で解くことができる.

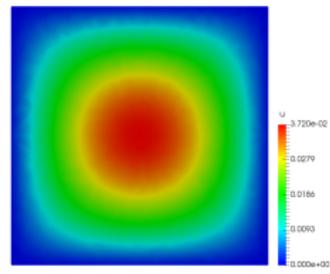
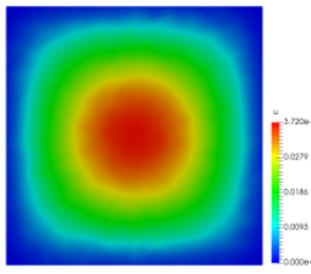
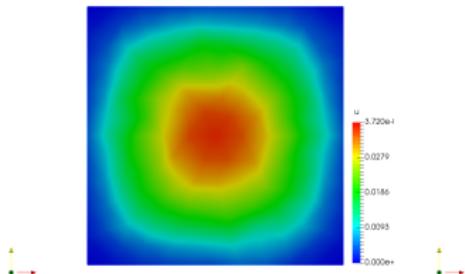
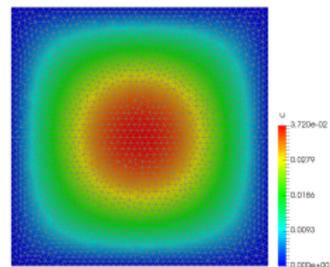
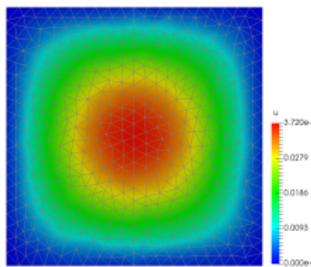
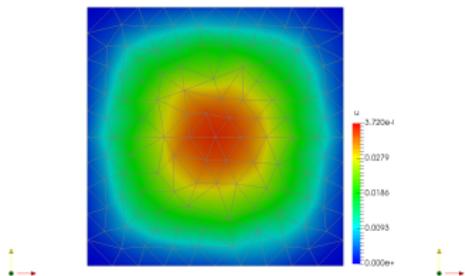
### 例 1

- $\Omega = (0, 1)^2$ : 正方形
- $f = \exp(-((x - x_0)^2 - (y - y_0)^2))$ ,  $x_0 = 0.5$ ,  $y_0 = 0.5$

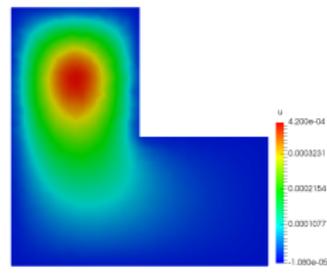
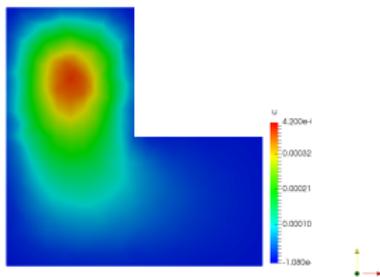
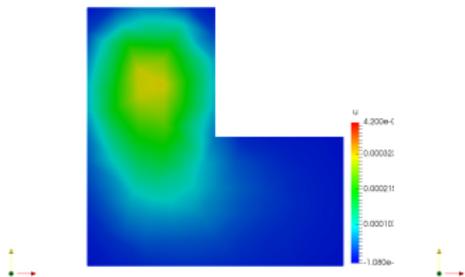
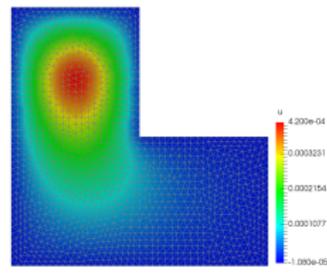
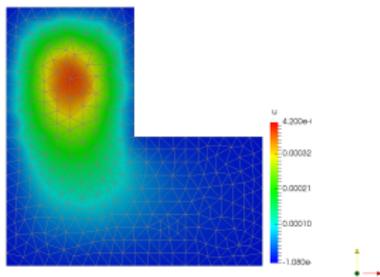
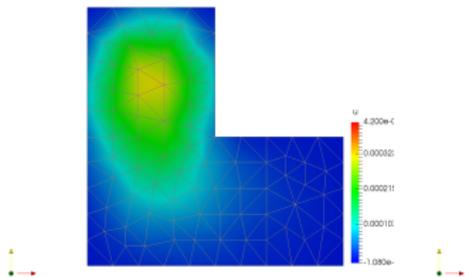
### 例 2

- $\Omega$ : L-shaped domain  
 $(0, 0) \rightarrow (0, 1) \rightarrow (-1, 1) \rightarrow (-1, -1) \rightarrow (1, -1) \rightarrow (1, 0)$
- $f = \exp(-100((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2))$ ,  $x_0 = -0.5$ ,  $y_0 = 0.5$

# 分離解法：正方形



# 分離解法：L 型領域



# DG 法による解法

しかし、どうしても元の問題をそのまま解きたい、という場合には、**不連続有限要素 (DG) 法**による解法が利用できる。

## DG 型の弱形式

Find  $u \in W = \{v \in L^2(\Omega) \mid v|_K \in H^2(K) (\forall K \in \mathcal{T}_h), v|_\Gamma = 0\}$  s.t.

$$\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K (\Delta u)(\Delta \phi) \, dx + \sum_{e \in \mathcal{E}_h^{\text{int}}} \left( \int_e \frac{\alpha}{h_e} [[\nabla u]][[\nabla \phi]] \, dS - \int_e \langle\langle \Delta u \rangle\rangle [[\nabla \phi]] \, dS - \int_e [[\nabla u]] \langle\langle \Delta \phi \rangle\rangle \, dS \right) = \int_\Omega f \phi \, dx \quad \forall \phi \in W.$$

ただし、 $\langle\langle u \rangle\rangle = \frac{1}{2}(u^+ + u^-)$ ,  $[[w]] = w^+ \cdot n^+ + w^- \cdot n^-$ .

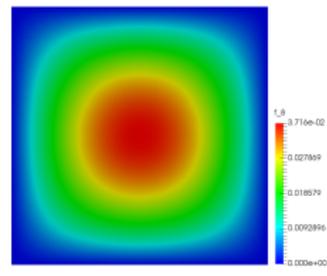
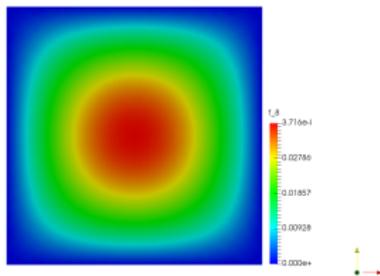
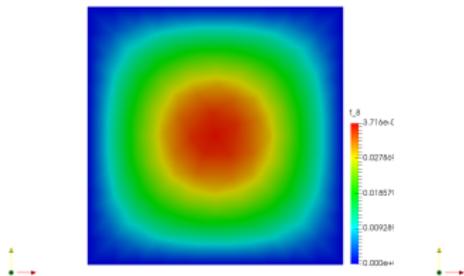
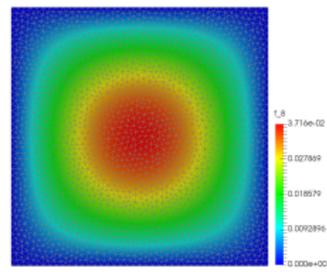
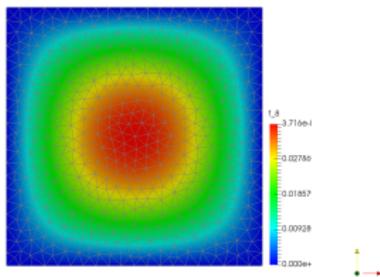
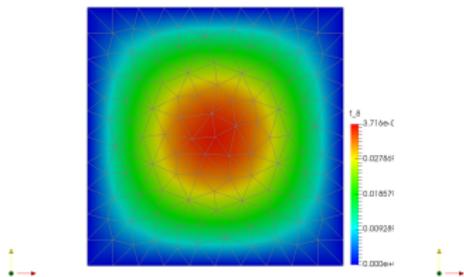
このように定式化しておく、有限要素として不連続 P2 要素

$$W_h = \{v_h \in W \mid v_h|_K \in \mathcal{P}^2(K) (\forall K \in \mathcal{T}_h)\}$$

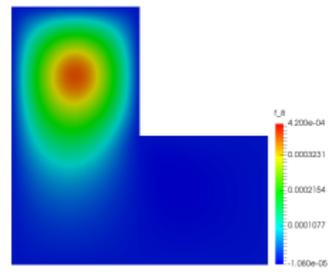
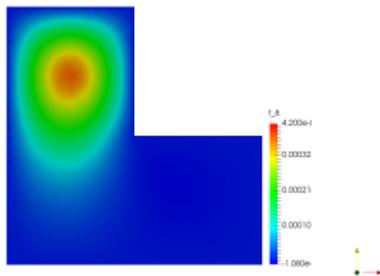
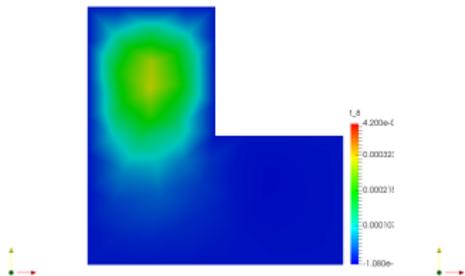
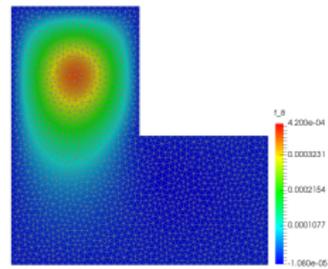
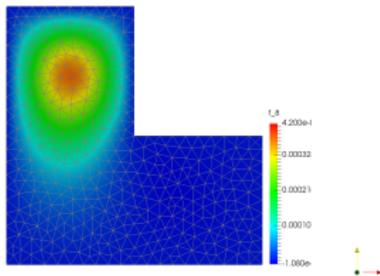
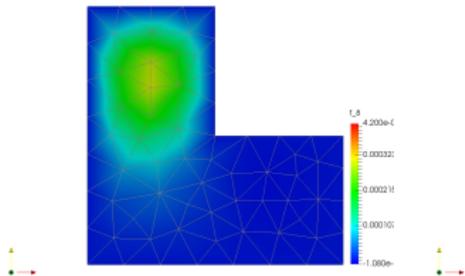
が利用できる。そして、**FEniCS** で簡単に実行できる：

<http://fenicsproject.org/documentation/dolfin/dev/python/demo/documented/biharmonic/python/documentation.html>

# DG 法：正方形



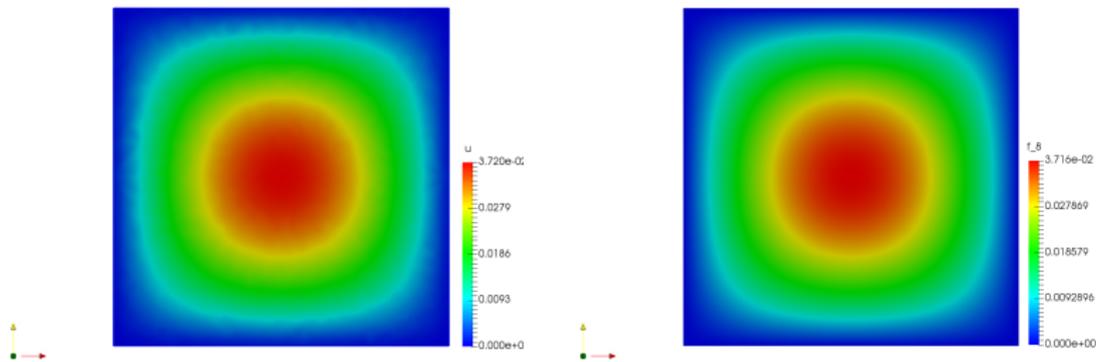
# DG 法 : L 型領域



## 問題

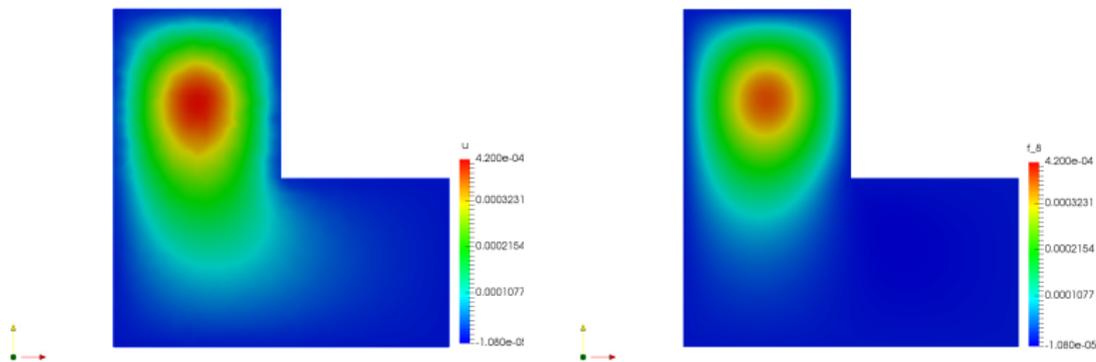
今までの話で、おかしいところはなかったか？

# 比較: 分離解法 vs. DG 法 : 正方形



良いようだ、、、

# 比較: 分離解法 vs. DG 法 : L 型領域



なにか違うような、、、

# 反省

- 分離解法は、(Q) を正しく解いている (近似解は  $h \rightarrow 0$  で収束している。数学的に証明もできる)
- DG 法は、(P) を正しく解いている (近似解は  $h \rightarrow 0$  で収束している。数学的に証明もできる)
- (P) も (Q) も数学的には well-posed である。(数学的に意味のある問題)
- “(P) と (Q) が同値である” は、利用者の願望である。実際、

$\Omega$  が凸多角形の時には、同値になる。

$\Omega$  に非凸の角のある場合には、(一般には) 同値にはなり得ない。

ことを数学的に証明できる。

**参考文献.** S. A. Nazarov and G. Sweers: *A hinged plate equation and iterated Dirichlet Laplace operator on domains with concave corners*, J. Differential Equations **33** (2007) 151–180.

## 復習：問題 (P) と (Q) およびその弱形式

$$\Delta^2 u = f \text{ in } \Omega, \quad u = \Delta u = 0 \text{ on } \Gamma = \partial\Omega \quad (\text{P})$$

弱形式は,  $U = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$  において,

$$u \in U, \quad \iint_{\Omega} (\Delta u)(\Delta \phi) \, dx dy = \iint_{\Omega} f \phi \, dx dy \quad (\forall \phi \in U). \quad (\text{WP})$$

$$\Delta u = v \text{ in } \Omega, \quad u = 0 \text{ on } \Gamma, \quad \Delta v = f \text{ in } \Omega, \quad v = 0 \text{ on } \Gamma \quad (\text{Q})$$

弱形式は,  $V = H_0^1(\Omega)$  において,

$$\begin{aligned} u, v \in V, \quad & - \iint_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \phi \, dx dy = \iint_{\Omega} v \phi \, dx dy, \\ & - \iint_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla \phi \, dx dy = \iint_{\Omega} f \phi \, dx dy \quad (\forall \phi \in V). \quad (\text{WQ}) \end{aligned}$$

# Poisson 方程式の解の正則性

解の正則性. 任意の  $f \in L^2(\Omega)$  に対して, Poisson 方程式の弱形式

$$u \in V = H_0^1(\Omega), \quad \iint_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \phi \, dx dy = \iint_{\Omega} f \phi \, dx dy \quad (\forall \phi \in V).$$

には一意な解  $u$  が存在する (これは既知). さらに,  $\Omega$  が  $C^1$  級の有界領域, または, 凸多角形ならば,

$$u \in H^2(\Omega), \quad \|u\|_{H^2(\Omega)} \leq C \|f\|_{L^2(\Omega)}$$

となる.

$\Omega$  に非凸の角がある場合には,  $u \notin H^2(\Omega)$  となる  $f \in L^2(\Omega)$  が無数に存在する.

- $C^1$  級の有界領域の場合: 普通の偏微分方程式論のテキスト. Brezis, Evans など
- 凸多角形の場合: 例えば,
  - P. Grisvard: *Elliptic Problems in Nonsmooth Domains*, Pitman, 1985.
  - P. Grisvard: *Behavior of the solutions of an elliptic boundary value problem in a polygonal or polyhedral domain*, Numerical solution of partial differential equations, III pp. 207–274, Academic Press, 1976.
  - A. Kufner and A. M. Sändig: *Some applications of weighted Sobolev spaces*, Teubner Texts in Mathematics **100**, Teubner Verlagsgesellschaft, 1987.

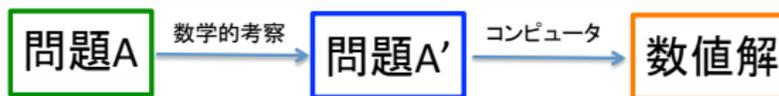
## 再度, 反省

$$u \in U = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega), \quad \iint_{\Omega} (\Delta u)(\Delta \phi) \, dx dy = \iint_{\Omega} f \phi \, dx dy \quad (\forall \phi \in U). \quad (\text{WP})$$

$$\begin{aligned} u, v \in V = H_0^1(\Omega), \quad & - \iint_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \phi \, dx dy = \iint_{\Omega} v \phi \, dx dy, \\ & - \iint_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla \phi \, dx dy = \iint_{\Omega} f \phi \, dx dy \quad (\forall \phi \in V). \quad (\text{WQ}) \end{aligned}$$

- (WQ) の解  $(u, v)$  が  $u \in H^2(\Omega)$  であるなら, それが (WP) を満たすことが示せる.  
←  $\phi = \Delta \tilde{\phi}, \tilde{\phi} \in C_0^\infty(\Omega)$  と取れば良い!
- $\Omega$  が正方形のとき, 実際に,  $u \in H^2(\Omega)$  となる
- しかし,  $\Omega$  が L 型領域の時, 一般には, (WQ) の解  $(u, v)$  は  $u \notin H^2(\Omega)$  であり, (WP) の解にはなり得ない.

# 教訓



数学の記号によって表現したいもの、あるいは、表現できていると思っているものが、本当に表現できているかは自明なことではなく、数学的な考察が必要である。



## この種のパラドックス

- M. Sh. Birman, *Three problems in continuum theory in polyhedra*, J. Math. Sci. **77** (1995), no. 3, 3153–3160;  
The original Russian version is published in Zap. Nauchn. Sem. S. Peterburg. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (POMI) **200**, (1992) 27–37
- V. G. Maz'ya, S. A. Nazarov and B. A. Plamenevskii, *On the bending of a nearly polygonal plate with freely supported boundary*, Soviet Math. (Iz. VUZ) **27** (1983), no. 8, 40–48;  
The original Russian version is published in Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat. 1983, no. 8, 34–40.

# 問題の背景

ここで議論した問題は、汎関数

$$E(u) = \iint_{\Omega} \left[ \frac{1}{2}(\Delta u)^2 + (1 - \sigma)(u_{xy} - 2u_{xx}u_{yy}) + fu \right] dx dy$$

を  $U = \{u \in H^2(\Omega) \mid v|_{\Gamma} = 0\}$  で最小化する問題と同値である ( $0 \leq \sigma < 1/2$  は Poisson 比). 物理的には、薄い平板の縁を固定して外力  $f$  を与えた際の平衡状態を求めることに対応している. これは、

$$\Delta^2 u = f \text{ in } \Omega, \quad u = \Delta u + (1 - \sigma)\kappa u_n = 0 \text{ on } \Gamma$$

と“同値”になる.  $\kappa$  は  $\Gamma$  の曲率である. したがって、**「がまっすぐな部分  $\gamma \subset \Gamma$  では、**境界条件は  $u = \Delta u = 0$  on  $\gamma$  となる.

## 注意と課題

本当は、**角では接合条件が必要**になる. 接合条件も含めた、“正しい変分法的な定式化”を求めて、再度、このパラドックスを考察することには意味がありそうだ.

参考. T. Kato, H. Fujita, Y. Nakata, and M. Newman: *Estimation of the Frequencies of Thin Elastic Plates With Free Edges*, J. Res. Nat. Bur. Stand. **59** (1957) 169–186

## もう一つの教訓

前に次の定理を紹介した。  $u$ : Poisson 方程式の解,  $u_h$ : その有限要素近似

### 定理

三角形分割 (の族) に対する適当な仮定のもとで,  $\|\nabla(u - u_h)\|_{L^2(\Omega)} \rightarrow 0$  ( $h \rightarrow 0$ ) が成り立つ。とくに,  $u \in H^2(\Omega)$  ならば,

$$\|\nabla(u - u_h)\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch|u|_{H^2(\Omega)} \quad (\text{A})$$

が成り立つ。さらに,  $\Omega$  が凸多角形ならば,

$$\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch^2|u|_{H^2(\Omega)} \quad (\text{B})$$

次を区別することが大切である:

- 考えている  $f \in L^2(\Omega)$  に対して,  $u \in H^2(\Omega)$  であれば, (A) が成り立つ。
- 一方で, **任意の**  $f \in L^2(\Omega)$  に対して,  $u \in H^2(\Omega)$  であれば, (B) が成り立つ。  
← Aubin–Nitsche の技法!

## Poisson 方程式の特異解 (1/2)

- $\omega = k\pi$ ,  $0 < k < 2$ ,  $k \neq 1$
- Lipschitz 領域  $\Omega = \{(r, \theta) \mid 0 < r < R, 0 < \theta < \pi/\omega\}$

$$-\Delta u = f \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{4}{R^2}(1 + \pi/\omega)w(r, \theta) \quad (x, y) \in \Omega, \quad u = 0 \quad (x, y) \in \partial\Omega.$$

ただし,  $w(r, \theta) = r^{\pi/\omega} \sin\left(\frac{\pi}{\omega}\theta\right)$  と置いている. このとき, 解  $u$  は,

$$u(x, y) = \phi(r)w(r, \theta). \quad \left[ \phi(r) = 1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2 \right]$$

$\phi(r)$  は “おとなしい” が,

$$\|w\|^2 < \infty, \quad \|\nabla w\|^2 < \infty, \quad |w|_{H^2}^2 \begin{cases} < \infty & (0 < \omega < \pi) \\ = \infty & (\pi < \omega < 2\pi) \end{cases}$$

なので,  $u \in H_0^1(\Omega)$  ではあるものの,

$$0 < \omega < \pi \Rightarrow u \in H^2(\Omega), \quad \pi < \omega < 2\pi \Rightarrow u \notin H^2(\Omega)$$

## Poisson 方程式の特異解 (2/2)

もう少し詳しく考察する。記号として、 $\beta$  と  $w$  に対して、

$$\|D^\beta w\|^2 \stackrel{\text{def.}}{=} \int_0^R r^{2\alpha-2\beta+1} dr \begin{cases} < \infty & (\beta < \frac{\pi}{\omega} + 1) \\ = \infty & (\beta \geq \frac{\pi}{\omega} + 1) \end{cases}$$

とおく。実際、 $\|w\|^2 \sim \|D^0 w\|^2$ ,  $\|\nabla w\|^2 \sim \|D^1 w\|^2$ ,  $|w|_{H^2}^2 \sim \|D^2 w\|^2$  が計算できる。さらに、分数冪 Sobolev 空間  $H^s(\Omega)$  を、然るべく定義すれば、 $w$  については、

$$\|w\|_{H^\beta(\Omega)}^2 \sim \|w\|_{H^1}^2 + \|D^\beta w\|^2.$$

すなわち、

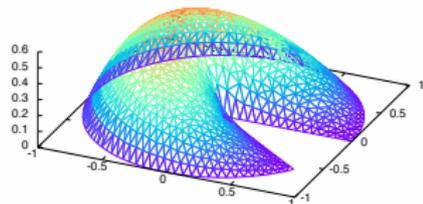
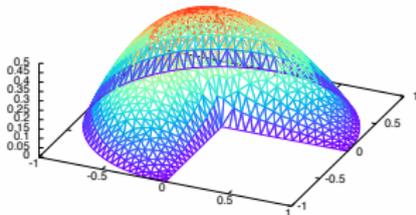
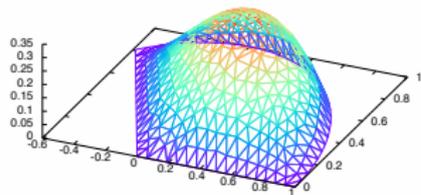
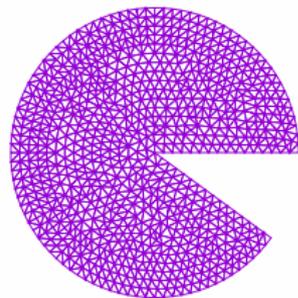
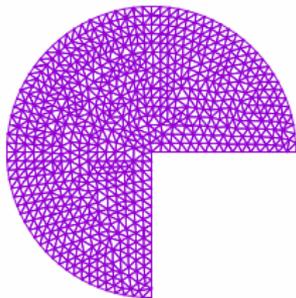
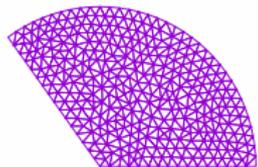
$$\beta < \frac{\pi}{\omega} + 1 \quad \Rightarrow \quad w \in H^\beta(\Omega).$$

なお、 $\pi < \omega < 2\pi$  である限り、 $\beta \leq 3/2$  は、常に成り立つ。したがって、少なくとも、

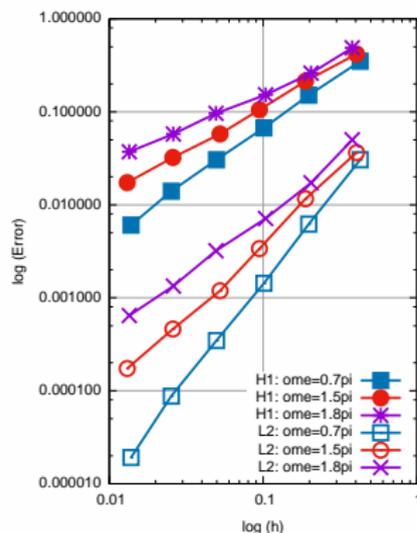
$$w \in H^{3/2}(\Omega)$$

は保証される。

# 数值例



# 誤差の減衰：Poisson 方程式の特異解と有限要素近似



$\Omega$  を多角形  $\Omega_h$  で近似し,  $\Omega_h$  上での P1 要素  $V_h$  を考える.

$$u_h \in V_h, \quad \iint_{\Omega_h} \nabla u_h \cdot \nabla v_h \, dx dy = \iint_{\Omega_h} f v \, dx dy \quad \forall v_h \in V_h.$$

前と同様に,

$$\mathcal{E}_{X,h}^{\text{fine}} = \|\Pi_h^{\text{fine}} u - \Pi_h^{\text{fine}} u_h\|_X, \quad X = H_0^1(\Omega_h), L^2(\Omega_h)$$

をプロットする.

(本当は, 領域の近似の影響などを考慮しなければならない)

- ① まえおき
- ② Poisson 方程式の有限要素近似
- ③ 有限要素法の収束
- ④ 重調和問題の有限要素近似
- ⑤ オリジナルの Babuška のパラドックス
- ⑥ まとめ

# Babuškaのパラドックス: Babuška (1963)

(P)  $\Omega = B(0, 1)$ : 中心 0, 半径 1 の円盤

$$\begin{cases} \Delta^2 \phi = 1 & \text{in } \Omega, \\ \phi = 0, \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial n^2} = \nabla(\nabla \phi \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

解は,  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  とおいて,

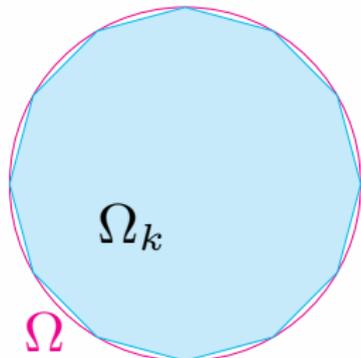
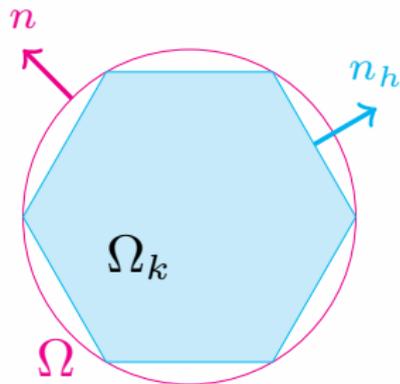
$$\phi(x, y) = \frac{1}{64}(r^2 - 1)(r^5 - 5), \quad \phi(0, 0) = \frac{5}{64}.$$

$\Omega_k$ : 正  $k$  角形 (円に内接)

(P<sub>k</sub>)

$$\begin{cases} \Delta^2 \phi_k = 1 & \text{in } \Omega_k, \\ \phi_k = 0, \quad \frac{\partial^2 \phi_k}{\partial n_k^2} = 0 & \text{on } \partial\Omega_k \end{cases}$$

しかしながら,  $\phi_k(0, 0) \rightarrow \frac{3}{64} \quad (k \rightarrow \infty) ???$



# タネあかし

実は,  $\|\phi - \phi_k\|_{L^\infty} \rightarrow 0$  とはならない.  
その代わりに,

$$\|\phi_k - \psi\|_{L^\infty} \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty).$$

(Q)

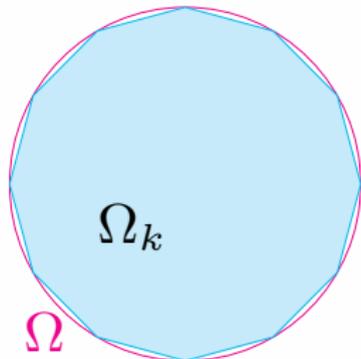
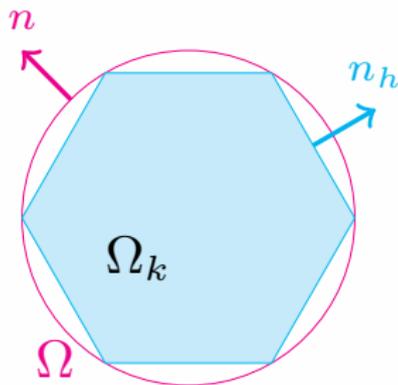
$$\begin{cases} \Delta^2 \psi = 1 & \text{in } \Omega, \\ \psi = 0, \quad \Delta \psi = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

$$\psi(x, y) = \frac{3}{64} - \frac{1}{64}r^2 + \frac{1}{64}r^4, \quad \psi(0, 0) = \frac{3}{64}.$$

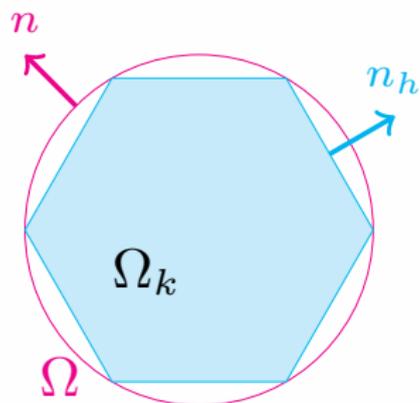
$\partial\Omega_k$  の各辺  $\Gamma_j$  上では,  $\phi_k = 0$  なので,

$$\begin{aligned} \Delta \phi_k &= \left( \frac{\partial}{\partial n_k} \right)^2 \phi_k + \left( \frac{\partial}{\partial T_k} \right)^2 \phi_k \\ &= \left( \frac{\partial}{\partial n_k} \right)^2 \phi_k. \end{aligned}$$

一方で, **曲がった境界上**では, このような関係式は成り立たない.



# 復習



(P)

$$\begin{cases} \Delta^2 \phi = 1 & \text{in } \Omega, \\ \phi = 0, \frac{\partial^2 \phi}{\partial n^2} = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

(P<sub>k</sub>)

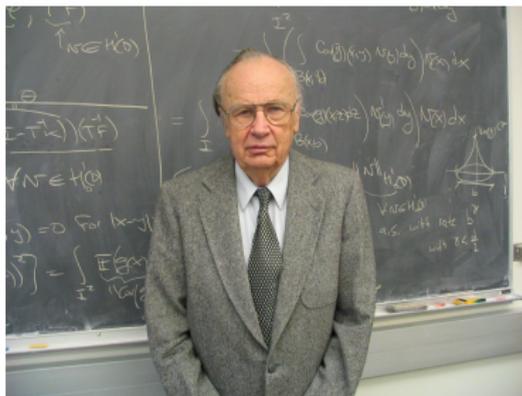
$$\begin{cases} \Delta^2 \phi_k = 1 & \text{in } \Omega_k, \\ \phi_k = 0, \frac{\partial^2 \phi_k}{\partial n_k^2} = 0 & \text{on } \partial\Omega_k \end{cases}$$

(Q)

$$\begin{cases} \Delta^2 \psi = 1 & \text{in } \Omega, \\ \psi = 0, \Delta \psi = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

# Ivo M. Babuška (1926–)

- プラハ (チェコ) 生まれ
- Professor at University of Maryland (1968) → University of Texas at Austin
- Former students: J. Nečas, Ch. Schwab, 土屋卓也 (愛媛大学) ...  
(Mathematics Genealogy Project **には 36 人**)
- Babuška-Brezzi の理論 (inf-sup 条件), Babuška-Aziz の定理, *hp*-version FEM, ...



[https://users.ices.utexas.edu/~babuska/babuska\\_homepage/photos.html](https://users.ices.utexas.edu/~babuska/babuska_homepage/photos.html)

- ① まえおき
- ② Poisson 方程式の有限要素近似
- ③ 有限要素法の収束
- ④ 重調和問題の有限要素近似
- ⑤ オリジナルの Babuška のパラドックス
- ⑥ まとめ

# まとめ

- 数値解の妥当性を検証するには、離散化のパラメータを小さくしていった際に、“収束している”ことを確かめるのが、最も基本的で重要である。
- 厳密解のわかる場合での検証も有効である。
- 数学的な収束証明もあった方がよい。
- しかし、何れにせよ、自分が何を求めているのかを見失ってはいけない。数学的な定式化の検討も大切である。

## 参考文献

- I. Babuška: *The theory of small changes in the domain of existence in the theory of partial differential equations and its applications*, 1963 *Differential Equations and Their Applications (Proc. Conf., Prague, 1962)* pp. 1326, Publ. House Czechoslovak Acad. Sci., Prague; Academic Press, New York
- S. A. Nazarov and G. Sweers: *A hinged plate equation and iterated Dirichlet Laplace operator on domains with concave corners*, *J. Differential Equations* **33** (2007) 151–180
- T. Kato, H. Fujita, Y. Nakata, and M. Newman: *Estimation of the Frequencies of Thin Elastic Plates With Free Edges*, *J. Res. Nat. Bur. Stand.* **59** (1957) 169–186
- S. C. Brenner: *A Cautionary Tale in Numerical PDEs*, AWM/SIAM Sonia Kovalevsky Lecture, ICIAM 2011, Vancouver, July 18, 2011, [http://meetings.siam.org/session/dsp\\_programsess.cfm?SESSIONCODE=13582](http://meetings.siam.org/session/dsp_programsess.cfm?SESSIONCODE=13582)

ご清聴ありがとうございました

このスライドは <http://www.infsup.jp/saito/> に置きます



Graduate School of Mathematical Sciences  
THE UNIVERSITY OF TOKYO